STK4500: Livsforsikring og finans
Heimeeksamen - Vår 2021

Denne eksamensoppgåva består av 2 hovudoppgåver med totalt 5 deloppgåver. Kvar enkelt deloppgåve er verd 10 poeng og sluttkarakteren er gitt ved summen av alle poeng ganga med to. Den endelege karakteren er sett etter ei heilskapsvurdering. Eksamenen finn stad på **Torsdag 10. juni, 9:00-13:00**. Ver vennleg og pass på å vera nøye med å presentera matematiske resultat og formlar. Framvis og presentér resultata og formlane du bruker, og referér til forelesningsnotatene eller boka. LaTeX eller ein annan teksteditor er føretrekt, men dersom du utfører eksamenen for hand, ver vennleg og **skriv tydeleg** og ikkje stryk over. Legg ved programkodane du nyttar i eit appendiks.

Finanstilsynet er ein norsk statleg etat som førar tilsyn med føretak og marknader for å bidra til finansiell stabilitet og fungerande marknader. Tilsynet er underlagt Finansdepartementet, men i 2016 vart tilsynet underlagt EUs finanstilsyn via European Space Agency (ESA).

Forsikringsføretak og pensjonsfond nyttar bruk av døyingsgrunnlag foreslått av Finanstilsynet i eit brev frå 8. mars, 2013. Du kan finna dette brevet ved å trykka på `finanstilsynet.no` og skriva "K2013" i søkefeltet. Dokumentet er kalla "Nytt dødelighetsgrunnlag i kollektiv pensjonsforsikring". Du kan òg gå direkte via lenka herunder:

`https://www.finanstilsynet.no/contentassets/60b4b0182be14b69a0dd1a2a6ec019b2/nytt-doedelighetsgrunnlag-i-kollektiv-pensjonsforsikring-k-2013.pdf`

På side 4 av dette dokumentet, vil du finna ein modell for døyinga i Noreg for kollektiv pensjon basert på data frå 2013, der dei har tillagt ein eksponensiell trend forårsaka av aukande levetid. Dei vurderer følgjande funksjon

$$\mu_{Kol}(x,t) = \mu_{Kol}(x,2013)\left(1+\frac{w(x)}{100}\right)^{t-2013}, \quad t \in \{2013, 2014, 2015, \dots\}. \tag{0.1}$$

Her er $\mu_{Kol}(x, 2013)$ døyinga for ein medlem i alder x i 2013, medan $\mu_{Kol}(x,t)$ er døyinga for ein medlem i alder x i kalenderår t (for t minst lik 2013). Vidare blir døyingsnedgangen namngitt med $w(x)$, der

$$\begin{aligned} w(x) &= \min\{2.671548 - 0.172480x + 0.001485x^2, 0\} \quad \text{for menn,} \\ w(x) &= \min\{1.287968 - 0.101090x + 0.000814x^2, 0\} \quad \text{for kvinner.} \end{aligned} \tag{0.2}$$

Døyinga for opplevingsrisiko er gitt ved følgjande formlar:

$$\begin{aligned} 1000\mu_{Kol}(x,2013) &= 0.189948 + 0.003564 \cdot 10^{0.051x} \quad \text{for menn,} \\ 1000\mu_{Kol}(x,2013) &= 0.067109 + 0.002446 \cdot 10^{0.051x} \quad \text{for kvinner.} \end{aligned} \tag{0.3}$$

Døyinga for dødsrisiko er gitt ved følgjande formlar:

$$\begin{aligned} 1000\mu_{Kol}(x,2013) &= 0.241752 + 0.004536 \cdot 10^{0.051x} \quad \text{for menn,} \\ 1000\mu_{Kol}(x,2013) &= 0.085411 + 0.003114 \cdot 10^{0.051x} \quad \text{for kvinner.} \end{aligned} \tag{0.4}$$

Oppgåve 1 (Uførepensjonsmodell)

Uførepensjonsmodell er ein modell som består av, minst, tre tilstandar $S = \{*, \diamond, \dagger\}$. Sannsynet for ein overgang frå $\diamond$ til $*$ (reaktivering) avheng av varigheita i uføretilstanden $\diamond$. Det gir derfor meining å dekomponera $\diamond$ i fleire tilstandar $\diamond_1, \ldots, \diamond_n$. Tilstanden $\diamond_k$ representerer forsikra som er uføre frå år $k-1$ til år k. Ein må openbert ha vore i tilstand $\diamond_{j-1}$, $j = 2, \ldots, k$ for å ha tilgang til tilstand $\diamond_k$ for kvar $k = 2, \ldots, n$.

I tillegg antar vi at $\diamond_n$ er ein permanent uføretilstand, som betyr at det er inga moglegheit for reaktivering; dei einaste moglege overgangane er $\diamond_n \rightsquigarrow \diamond_n$ og $\diamond_n \rightsquigarrow \dagger$. Sjå Markov-diagrammet:

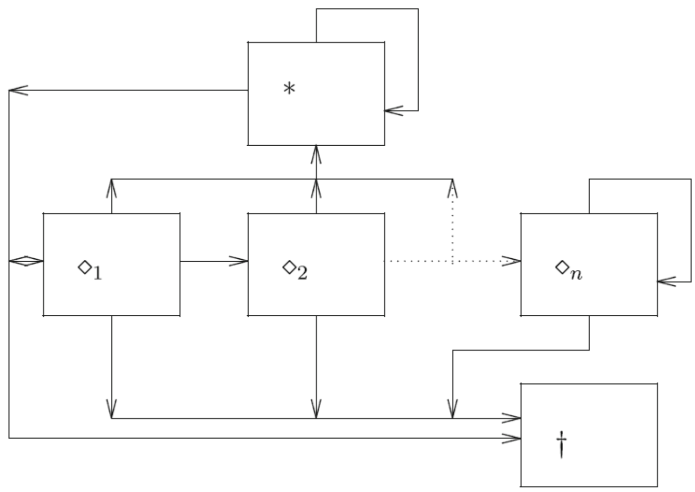

FIGURE 1: Ein ofte brukt uføremodell.

Vurder den følgjande tidsdiskrete modellen med dei følgjande ett-stegs-overgangssannsyna,

$$\begin{aligned}
p_{*\dagger}(x) &= \exp\left(-7.85785 + 0.01538x + 0.000577355x^2\right), \\
p_{*\diamond_1}(x) &= 3 \cdot 10^{-4} \cdot (8.4764 - 1.0985x + 0.055x^2), \\
p_{\diamond_k *}(x) &= \begin{cases} \exp\left(-0.94(k-1)\right) \cdot \alpha(x-k), & \text{if } k < n, \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}, \\
\alpha(y) &= 0.763313 - 0.01045y, \quad y \geqslant 0, \\
p_{\diamond_k \dagger}(x) &= 0.008 + p_{*\dagger}(x), \\
p_{**}(x) &= 1 - p_{*\diamond_1}(x) - p_{*\dagger}(x), \\
p_{\diamond_k \diamond_{k+1}}(x) &= 1 - p_{\diamond_k *}(x) - p_{\diamond_k \dagger}(x).
\end{aligned}$$

Sjå for deg ei uførepensjonsordning med dei følgjande spesifikasjonane:

Tal uføretilstandar: $n = 10$

Konstant årleg rente: $r = 3\%$

Alder ved skipinga av polisen: $x_0 = 30$

Kontraktsopphøyr: $T = 40$

Årleg uførepensjon i tilfelle av uførleik: NOK 200 000

(a) Berekn noverdiane for den ovannemnde polisen, gitt alle moglege tilstandar $*, \diamond_1, \ldots, \diamond_{10}$, der $\diamond_{10}$ er tilstanden for permanent uførleik. Vis ein figur med alle noverdiane.

(b) Forklar kva er equivalensprinsippet (equivalence principle) og berekn enkelpremien og årlegpremien for denne forsikringa, gitt at den forsikra er aktiv ved inngåing av kontrakten (anta at premiar er oppheva dersom poliseinnehavaren er ufør). Vis til slutt ein figur med alle reserver og ein figur med berre reservane når den forsikra er aktiv. Kva skjer med reservane mot slutten av kontrakten? Kvifor?

Oppgåve 2 (Forsikringspolise med investeringsval)

For denne oppgåva, skal du nytta døyinga foreslått av Finanstilsynet i likning (0.1) ved å velja $t = 2021$ med vekter (0.2) og (0.4).

Vurder eit fond S med stokastisk dynamikk gitt ved

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad t \in [0, T], \quad S_0 = \text{NOK } 1\ 000\ 000, \tag{0.5}$$

der $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ er parametrar og W er ein Brownsk bevegelse.

Vi vurderer eit lesbisk ektepar der den eine partnaren er $x_0 = 30$ år gammal og den andre er $y_0 = 40$ år gammal. Vi ynsker å sjå på ei forsikring som utbetaler 150% av verdien av fondet til den etterlatte om ei av dei skulle falle frå. Vi antar at begge partnarane har stokastisk uavhengige liv. Vidare kontraktsspesifikasjonar er

Konstant årleg rente: $r = 3\%$
Kontraktsopphøyr: $T = 40$
Dødsfallserstatning: 150% av verdien av fondet
Avkastinga av fondet: $\mu = 7\%$
Volatiliteten til fondet: $\sigma = 25\%$

(a) Berekn overflata til noverdien for denne forsikringsavtalen, gitt tid og verdien av fondet så lenge begge partnarane lever.

(b) Berekn enkelpremien og årlegpremien for denne forsikringsavtalen og plott overflata for den matematiske reserven. Plott òg den forventa matematiske reserven.

(c) Estimér, empirisk, fordelinga til den initiale (stokastiske) reserven

$$V^+_{0,S_0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T v(s)dA(s)\right],$$

der $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ er forventninga under risikonøytralmålet, $v(t) = e^{-rt}$ og A er den stokastiske utbetalingsstraumen generert av denne polisen. Dobbeltsjekk at den empiriske forventninga er noko nærme enkelpremien frå (a). Generér mange slike enkelpremier ved å bruka denne algoritmen og plott så eit histogram. Oppgi òg nokre beskrivande statistiske mål. Kjenner du igjen noko fordeling? Kvifor eller kvifor ikkje?

LYKKE TIL!