UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-BIO2100 — Matematisk biologi
Eksamensdag:	Onsdag 5. juni 2013
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler er tillatt i tillegg til godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La x_n være antall fisk i generasjon n i en innsjø. Vi skal modellere utviklingen av antall fisk ved hjelp av Ricker's modell, som er den diskrete ligningen

$$x_{n+1} = ax_n e^{-bx_n}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

med initial betingelse $x_0 \geq 0$, og hvor a, b er positive konstanter.

1a

Gi en tolkning av leddene ax_n og e^{-bx_n}? Skisser grafene til $y = 5xe^{-x}$ og $y = x$. Bestem likevektspunktene (steady-state løsningene) til (1) for vilkårlige $a, b > 0$.

1b

Bestem stabiliteten til likevektspunktene (som avhenger av a, b).

1c

Anta $a = 5$, $b = 1$ og $x_0 = 1$. Hva vil skje med fiskebestanden x_n når n blir stor? Illustrer svaret ved å tegne et cobweb diagram.

1d

Anta $b = 1$ og at $0 < a < e^2$. Angi bifurkasjonspunktet og typen. Tegn et tilhørende bifurkasjonsdiagram.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Mutualisme (symbiose) er tilstede over alt i naturen (f.eks. plante-pollinator interaksjoner). Mutualistiske interaksjoner innebærer utveksling av varer eller tjenester mellom to arter, kalt gjensidige partnere. Per definisjon må hver art som er involvert i mutualisme motta nytte av samspillet. Vi skal her betrakte følgende modell for mutualistisk interaksjon mellom to gjensidige partnere, hvor hver art N_1 og N_2 utvikler seg logistisk i fravær av den andre:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{d\tau} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} + b_{12}\frac{N_2}{K_1}\right), \\ \frac{dN_2}{d\tau} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} + b_{21}\frac{N_1}{K_2}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

hvor r_1, K_1, r_2, K_2 og b_{12}, b_{21} er positive konstanter.

2a

Gi en tolkning av konstantene (r_1, K_1, b_{12}) og (r_2, K_2, b_{21}).

Sett

$$\begin{aligned} &u_1 = \frac{N_1}{K_1}, \quad u_2 = \frac{N_2}{K_2}, \quad t = r_1\tau, \\ &\rho = \frac{r_2}{r_1}, \quad a_{12} = b_{12}\frac{K_2}{K_1}, \quad a_{21} = b_{21}\frac{K_1}{K_2}, \end{aligned}$$

og vis at systemet (2) kan skrives som

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_1\left(1 - u_1 + a_{12}u_2\right) = f_1(u_1, u_2), \\ \frac{du_2}{dt} &= \rho u_2\left(1 - u_2 + a_{21}u_1\right) = f_2(u_1, u_2). \end{aligned} \tag{3}$$

2b

Finn likevektsløsningene til (3). Hvilken av likevektsløsningene ville du kalt “symbiotisk". Hvorfor?

2c

Anta at $a_{12} = a_{21} = a > 0$. Bestem stabiliteten til likevektsløsningenene. Anta videre at $0 < a < 1$ og tegn så et fasediagram.

Oppgave 3

Vi skal se på en modell for direkte overførbare sykdommer. En liten gruppe av infiserte individer blir innført i en stor populasjon, og vi ønsker å beskrive spredningen av infeksjon i populasjonen som en funksjon av tid. Følgende modell skal brukes:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -rSI, \\ \frac{dI}{dt} &= rSI - aI, \\ \frac{dR}{dt} &= aI, \end{aligned} \tag{4}$$

(Fortsettes på side 3.)

hvor r, a er positive konstanter og $S, I, R > 0$ er de ukjente funksjonene. Denne modellen kobles med initial betingelser:

$$S(0) = S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 > 0, \quad R(0) = 0.$$

3a

Gi en tolkning av S, I, R, r, a og leddene på høyresiden av systemet (4).

3b

Forklar hvorfor $S(t) \leq S_0$ for alle $t \geq 0$. Vi ønsker å finne ut om infeksjonen sprer seg eller ikke. Under hvilken betingelse på S_0 vil $I(t)$ avta for alle $t \geq 0$ (og dermed $I_0 > I(t) \to 0$ når $t \to \infty$)? Gi en tolkning av konstanten $R_0 = \frac{rS_0}{a}$.

3c

Vis at i faseplanet (S, I-planet) vil løsningsbanene tilfredsstille ligningen

$$I + S - \rho \ln S = I_0 + S_0 - \rho \ln S_0, \qquad \rho = \frac{a}{r}. \tag{5}$$

Anta $R_0 > 1$. Vi ønsker å avgjøre hvor kraftig en epidemi vil bli. Bestem for hvilken verdi av S funksjonen $I(t) > 0$ er maksimal. Hva er maksimalverdien I_{maks} til I.

SLUTT