

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT-INF1310 — Differensiallikninger.

Eksamensdag: Torsdag 12. juni 2008.

Tid for eksamen: 14.30 – 17.30.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Finn løsningen av initialverdiproblemet

$$\begin{cases} y' = y/x^2 + e^{-1/x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

på $[0, +\infty)$.

Oppgave 2.

a) Finn den generelle løsningen av ligningen

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

b) Finn den generelle løsningen av ligningen

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \cos x.$$

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

Betrakt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

- Finne en fundamentalmatrise av systemet $y' = Ay$.
- Beregn e^{xA} .
- Finne løsningsen av initialverdiproblemet

$$\begin{cases} y' = Ay + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Oppgave 4.

La $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j}$ være en kontinuerlig funksjon fra $[0, +\infty)$ inn i $n \times n$ matrisene. Anta at

$$\sup_{x>0} \int_0^x |a_{ij}(t)| dt < \infty \text{ for alle } 1 \leq i, j \leq n.$$

La $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ være en løsning av systemet $y' = Ay$. Bruk Gronwalls lemma for å vise at

- $\varphi(x)$ er begrenset på $[0, +\infty)$;
- hvis $\varphi(x) \rightarrow 0$ når $x \rightarrow +\infty$, da er $\varphi(x) = 0$ for alle $x \geq 0$.

SLUTT