Notes for MAT-INF1310 – 6
Snorre Christiansen, 5. april 2005

Den obligatoriske oppgaven består i Problem A og Problem B – Oppgave 1 og 3. Problem C er et åpent spørsmål det ikke er obligatorisk å svare på. Problem B – Oppgave 2 er ikke obligatorisk, men studenter oppfordres til å gå igjennom den, eventuelt etter å ha lest side 523-525 i Edwards and Penney. Les også Remark 1.1 og notér at to ekstra spørsmål er lagt til i **fet tekst** i Problem B – Oppgave 3 spørsmål (b) og (c) i forhold til versionen av 22. mars 2005. Det skal altså plottes til sammen 16 figurer og hver figur bør ha en forklarende tittel.

Innleveringsfrist er:

27. april 2005 kl 14:00.

Oppgaven skal innleveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk Institutt (7. etg i N.H.Abels hus).

Følgende tekst er til informasjon: *Erfaringsmessig blir det lange køer rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere. Husk å skrive navn og gruppenummer/program på hvert ark i besvarelsen! Dersom du på grunn av sykdom eller lignende har behov for å utsette innleveringen, må du sende søknad til Elisabeth Seland (rom B 718, NHAbelshus, epost: studieinfo@math.uio.no, tlf. 22 85 59 07). Husk at sykdom må dokumenteres ved legeattest! Se forøvrig* `http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml` *for nærmere informasjon om reglement rundt obligatoriske oppgaver ved matematisk institutt. Oppgaven er obligatorisk og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man oppnå 3/4 av maksimal poengscore (for de obligatoriske oppgavene). Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke har kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn det du har kommet frem til. Det er lov å samarbeide og bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg (for hånd eller på datamaskin) og gjenspeile din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

1 Obligatorisk oppgave.

Vi minner om at gitt $k \in \mathbb{N}$ sier vi at en funksjon g er av klasse $C^k(I)$ hvis den er k ganger deriverbar på I og funksjonen $g^{(k)}$ er kontinuerlig på I.

Problem A. La I være et intervall i $\mathbb{R}$.
– **(a):** La $f : I \to \mathbb{C}$ være en funksjon. Sjekk at de to følgende betingelsene er ekvilalente:

(i) For alle $t \in I$ er $|f(t)| = 1$.

(ii) Det finnes en funksjon $\phi : I \to \mathbb{R}$ slik at for alle $t \in I$ er $f(t) = \exp(i\phi(t))$.

Definer $\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{C} \ : \ |x| = 1\}$. Resten av oppgaven går ut på å vise at hvis $f : I \to \mathbb{U}$ har visse deriverbarhetsegenskaper, kan man konstruere $\phi : I \to \mathbb{R}$ med tilsvarende deriverbarhetsegenskaper, til tross for at det *ikke* finnes noen *kontinuerlig* invers til avbildningen:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{U}, \\ s & \mapsto & \exp(is). \end{array} \right. \tag{1}$$

– **(b):** Anta at $f : I \to \mathbb{U}$ er deriverbar. Vis at for enhver $t \in I$ er $if'(t)f(t)^{-1} \in \mathbb{R}$ ved å derivere funksjonen $t \to |f(t)|^2$. Anta videre at $\phi : I \to \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon slik at for alle $t \in I$ er $f(t) = \exp(i\phi(t))$. Vis at for alle $t \in I$ er $\phi'(t) = -if'(t)f(t)^{-1}$.
– **(c):** Anta at $f : I \to \mathbb{U}$ er av klasse $C^1(I)$. Gitt $t_0 \in I$, velg $\phi_0 \in \mathbb{R}$ slik at $\exp(i\phi_0) = f(t_0)$. Definer $\phi : I \to \mathbb{R}$ ved:

$$\phi(t) = \phi_0 + \int_{t_0}^{t} -if'(s)f(s)^{-1}\mathrm{d}s. \tag{2}$$

Vis at for alle $t \in I$ er $f(t) = \exp(i\phi(t))$ (for eksempel ved å se på funksjonen $t \to f(t)\exp(-i\phi(t))$).
– **(d):** Se på likningen :

$$f'(t) - i\phi'(t)f(t) = 0. \tag{3}$$

Tolk spørsmål (b) og (c) i forhold til betraktninger om denne likningen, først som en differentiallikning med ukjent ϕ (og gitt f), så med ukjent f (og gitt ϕ).
– **(e):** La $f : I \to \mathbb{U}$ være en funksjon av klasse $C^1(I)$. Bruk spørsmål (b) og (c) til å bevise følgende utsagn: for enhver $t_0 \in I$ og $\phi_0 \in \mathbb{R}$ slik at $\exp(i\phi_0) = f(t_0)$ finnes det *en og bare en* funksjon $\phi : I \to \mathbb{R}$ av klasse $C^1(I)$ slik at $\phi(t_0) = \phi_0$ og for alle $t \in I$ er $f(t) = \exp(i\phi(t))$.
– **(f):** Når man skrur en skrukork en gang rundt går korken opp eller ned, men ihvertfall ikke tilbake til utgangspunktet, med mindre den er ødelagt. Finn en sammenheng mellom denne observasjonen og denne oppgaven.

Remark 1.1 *Du kan bruke at hvis $u : I \to \mathbb{C}$ er en deriverbar funksjon, så er funksjonen $v : I \to \mathbb{C}$ definert for $t \in I$ ved $v(t) = \exp(u(t))$, også deriverbar og $v'(t) = u'(t)\exp(u(t))$. Derimot hvis u og v er to komplekse funksjoner relatert ved $v(t) = \exp(u(t))$ så kan v være deriverbar uten at u er det (fordi u plutselig kan "hoppe" med en verdi $2\pi i$ uten at dette merkes utenfor eksponentialen). Sjekk også at for $a \in \mathbb{C}$ har vi $a\overline{a} = |a|^2$.*

Problem B: Pendelsvingninger. Gitt $\alpha > 0$ og $\epsilon \geq 0$, ser vi på annen ordens differensiallikningen:

$$\phi''(t) + \epsilon\phi'(t) + \alpha\sin(\phi(t)) = 0. \tag{4}$$

I dette problemet skal vi se på ulike aspekter av denne likningen. Vi tar det for gitt at for enhver $t_0 \in \mathbb{R}$ og $(\phi_0, \psi_0) \in \mathbb{R}^2$ finnes en og bare en løsning $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at $\phi(t_0) = \phi_0$ og $\phi'(t_0) = \psi_0$, og at denne løsningen er av klasse $C^k(\mathbb{R})$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

Oppgave 1: Generelle betraktninger og en fysisk tolkning.
– **(a):** Sjekk at 0 er en løsning på (4). La ϕ være en vilkårlig løsning. Sjekk at $t \mapsto \phi(t) + 2\pi$ og $t \mapsto -\phi(t)$ også er løsninger. Vis videre at $t \mapsto \phi(t + t_0)$ er en løsning for alle $t_0 \in \mathbb{R}$ og at hvis $\epsilon = 0$ er $t \mapsto \phi(-t)$ en løsning.
– **(b):** Betrakt en pendel bestående av en en masseløs stang med lengde l, som er festet i den ene enden (origo) og har en masse m i den andre enden. Vi antar at pendelen kan bevege seg i et plan som inneholder origo og at den er plassert i et gravitasjonsfelt med styrke g. Vis, ved hjelp av Newtons lov, at når $\phi(t)$ tolkes som en viss vinkel, kan pendelens bevegelser beskrives ved likning (4) når $\alpha = g/l$ og ϵ tolkes som et friksjonsledd. Lag en tegning. Selv om det er naturlig å tenke på $\phi(t)$ som en vinkel tillater vi verdier utenfor intervallet $[-\pi, \pi]$ i henhold til Problem A.
– **(c):** Hvis ϕ er en løsning til (4), definerer vi funksjonen $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved:

$$E(t) = \phi'(t)^2 - 2\alpha \cos(\phi(t)). \tag{5}$$

Vis at E er en avtagende funksjon og at hvis $\epsilon = 0$ er E konstant. Relater de to leddene i definisjonen av E til de fysiske begrepene kinetisk energi og potensial energi for pendelen beskrevet i spørsmål (b).
– **(d):** Finn alle konstante løsninger til (4). Hvilke vil du, i henhold til den fysiske tolkningen, karakterisere som stabile?
– **(e):** For små θ har vi $\sin(\theta) = \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$. Betrakt likningen:

$$\phi''(t) + \epsilon\phi'(t) + \alpha\phi(t) = 0. \tag{6}$$

Løs denne likningen. Hva er perioden til ϕ når $\epsilon = 0$?

Oppgave 2: Periodisitet.

I denne oppgaven antar vi at $\epsilon = 0$. Det vil være nødvendig å bruke spørsmål (c) i Oppgave 1 over.
– **(a):** Anta at $E(0) = 2\alpha$. Vis at hvis $\phi'(t_0) = 0$ for en vilkårlig t_0 må ϕ være konstant og ta en verdi av formen $\pi + 2\pi k$ med $k \in \mathbb{Z}$. Vis at hvis $\phi'(t) \neq 0$ for alle t, er ϕ monoton og at ϕ konvergerer i $-\infty$ og $+\infty$ mot to verdier av formen $\pi + 2\pi k$ med $k \in \mathbb{Z}$. Finn en eksplisitt formel for $\phi(t)$, gitt $\phi(0)$ og $\phi'(0)$.

Når $E(0) \neq 2\alpha$ finnes det ingen slik eksplisitt formel definert ved "elementære" funksjoner. Man kan likevel si en god del om ϕ.
– **(b):** Anta at $E(0) > 2\alpha$. Vis at for alle $t \in \mathbb{R}$ er $|\phi'(t)| \geq \beta$ for en viss $\beta > 0$. Vis at ϕ' har konstant fortegn ved hjelp av skjæringssetningen. Bruk det til å vise at ϕ er monoton og at $\phi(t)$ konvergerer mot $-\infty$ eller $+\infty$ når $t \to +\infty$. Vis en tilsvarende egenskap når $t \to -\infty$. Vis at $t \mapsto \exp(i\phi(t))$ er periodisk ved hjelp av unisitetsegenskaper ved differensiallikninger. Vis at perioden T er gitt ved:

$$T = 4 \int_0^\pi \frac{1}{(E(0) + 2\alpha\cos(\theta))^{1/2}} \mathrm{d}\theta. \tag{7}$$

– **(c):** Anta at $E(0) < 2\alpha$. Definer $a \in [0, \pi[$ som løsningen til likningen $\cos a = -E(0)/(2\alpha)$. Hvorfor er det en og bare en løsning på denne likningen? Vis at ϕ er periodisk og at for en viss $k \in \mathbb{Z}$ varierer $\phi(t) - 2\pi k$ mellom $-a$ og a. Vis at perioden til ϕ tilfredsstiller:

$$T = 4 \int_0^a \frac{1}{(E(0) + 2\alpha\cos(\theta))^{1/2}} \mathrm{d}\theta. \tag{8}$$

– **(d):** Vi fortsetter å anta at $E(0) < 2\alpha$ og ser nærmere på formelen vi oppnådde i (8). Definer funksjonen $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved :

$$I(u) = \int_0^1 \frac{1}{(s(1-s)(1+u+s(1-u)))^{1/2}} \mathrm{d}s. \tag{9}$$

Ved å substituere $\cos\theta - \cos a = s(1-\cos a)$ i (8), vis at :

$$T = 4(2\alpha)^{-1/2} I(\cos a). \tag{10}$$

Hva blir $I(1)$? Finn en Taylor utvikling av $I(u)$ rundt $u = 1$ ved å "derivere under integraltegnet". Bruk den til å vise at for små a har vi:

$$T(a) = 2\pi\alpha^{-1/2}(1 + (1/16)a^2 + \mathcal{O}(a^4)). \tag{11}$$

Hva er poenget med å ha en pendel i et veggur?

Oppgave 3: numeriske beregninger.

Vi antar at $\epsilon = 0$ og at $\alpha = 1$. Hvis ϕ er en løsning setter vi $\psi = \phi'$. Funksjonen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \; : \; t \mapsto (\phi(t), \psi(t))$ tilfredsstiller da et system av formen:

$$\phi'(t) = f(\phi(t), \psi(t)), \tag{12}$$
$$\psi'(t) = g(\phi(t), \psi(t)), \tag{13}$$

med $f(x, y) = y$ og $g(x, y) = -\sin(x)$. Sjekk dette. Vi velger et tidssteg $h > 0$ og ønsker å definere approksimasjoner ϕ_h og ψ_h av ϕ og ψ, gitt initial betingelser $\phi(0)$ og $\psi(0)$. Eulers metode består i å definere:

$$\phi_h(0) = \phi(0), \tag{14}$$
$$\psi_h(0) = \psi(0). \tag{15}$$

Deretter defineres ϕ_h og ψ_h rekursivt. For hver $n \in \mathbb{N}$ setter vi:

$$\phi_h((n+1)h) = \phi_h(nh) + hf(\phi_h(nh), \psi_h(nh)), \tag{16}$$
$$\psi_h((n+1)h) = \psi_h(nh) + hg(\phi_h(nh), \psi_h(nh)). \tag{17}$$

– **(a):** Implementer Euler's metode for pendelen i Matlab (eller et annet programmeringsspråk dersom du foretrekker det). Velg initial betingelser $\phi(0) = 0$ og $\psi(0) = 1$. For verdier $h = 3/10^k$ med $k = 1, 2, 3, 4$ plot punktene $(x_n, y_n) = (\phi_h(nh), \psi_h(nh))$ for alle hele verdier $n \in [0, 30/h[$ i et godt valgt koordinatsystem i planet. Lag en figur for hver k og *føy disse figurene til din besvarelse. Det skal være 2 figurer per A4 side og en forklarende tittel til hver figur. Føy også til kildekoden til implementeringen av Euler's metode – dog ikke mer enn 2 A4 sider.* La T være perioden til den eksakte løsningen ϕ. Omtrent hvor stor kan h være sammenliknet med T for at den numeriske løsningen skal se god ut over et tidsrom i størrelsesorden $2T$? Kall denne verdien h_0.

– **(b):** For den eksakte løsningen er ("energien") $E(t) = \psi(t)^2 - 2\cos(\phi(t))$ konstant. Initialbetingelsene fra forrige spørsmål tilsvarer $E(0) = -1$. Betrakt funksjonen:

$$\mathcal{E} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x, y) & \mapsto & y^2 - 2\cos(x). \end{array} \right. \tag{18}$$

Tegn nivåkurvene til $\mathcal{E}$ med verdier $\mathcal{E}(x,y) = -2,\ -1,\ 0,\ 1$ og 2 på grafikkene fra spørsmål (a). Ligger punktene (x_n, y_n) fra spørsmål (a) någenlunde på nivåkurven definert ved $\mathcal{E}(x,y) = -1$ (gi et svar for hvert valg av k)?($\mathcal{E}(x_n, y_n)$) **definerer en følge av reelle tall som representerer en numerisk energi på tidspunkt $t = nh$. *Plot disse verdiene for $n \in [3, 30/h[$ i et koordinatsystem som får frem de små variasjonene, $t = nh$ i abscisse (horisontale akse) og $\mathcal{E}(x_n, y_n)$ i ordinat (vertikale akse). Lag en figur for hver k, med forklarende tittel, to figurer per A4 side.*** La nå $h = h_0$. Etter omtrent hvor lang tid (sammenliknet med T) går punktene (x_n, y_n) vekk fra nivåkurven til $\mathcal{E}$?

En annen numerisk metode, ofte forbundet med Størmer, for å simulere pendelen, er å definere ϕ_h på følgende måte:

$$\phi_h(0) = \phi(0), \tag{19}$$

$$\phi_h(h) = \phi(0) + h\psi(0), \tag{20}$$

Deretter defineres ϕ_h rekursivt. For hver $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ velger vi $\phi_h((n+1)h)$ slik at:

$$\phi_h((n+1)h) - 2\phi_h(nh) + \phi_h((n-1)h) = -h^2 \sin(\phi_h(nh)). \tag{21}$$

– **(c):** Implementer denne metoden. Plot punktene (x_n, y_n) definert ved:

$$x_n = \phi_h(nh), \tag{22}$$

$$y_n = (\phi_h((n+1)h) - \phi_h((n-1)h))(2h)^{-1}, \tag{23}$$

for samme verdier av $\phi(0)$, $\psi(0)$, h og n som i spørsmål (a). *Føy disse figurene til din besvarelse.* ***Plot også følgen av verdier $\mathcal{E}(x_n, y_n)$ for $n \in [3, 30/h[$ slik som i spørsmål (b).*** Følger punktene (x_n, y_n) nivåkurven definert ved $\mathcal{E}(x,y) = -1$ bedre?

Epilog. Vi har definert ϕ_h i punktene nh for $n \in \mathbb{N}$ (ved hjelp av to forskjellige metoder). Mellom disse punktene kan vi definere ϕ_h ved:

$$\phi_h(nh + sh) = (1-s)\phi_h(nh) + s\phi_h((n+1)h) \quad \text{for} \quad s \in]0,1[. \tag{24}$$

I faget *numerisk analyse* beviser man ting som at funksjonen ϕ_h definert både ved Eulers metode og Størmers metode konvergerer mot ϕ når $h \to 0$ men at Størmers metode har bedre energibevaringsegenskaper, i en presis forstand.

Problem C. Dette er et bonusspørsmål det ikke er obligatorisk å svare på. Si så mye du kan om løsningen x til differensialliknigen:

$$x'(t) = \sin(t^2)x(t), \tag{25}$$

med initial betingelse x(0)=1. For eksempel: Kan x ta negative verdier? Er x begrenset på $[0, +\infty[$? Det kan være verdt å bemerke at den antideriverte til $t \mapsto \sin(t^2)$ *ikke* kan uttrykkes ved hjelp av "elementære" funksjoner.