UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF1310 — Differensiallikninger.
Eksamensdag:	Torsdag 15. juni 2006.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Svarskjema til Oppgave 2.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Vedlegget skal legges ved eksamensbesvarelsen

Oppgave 1.

a) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$x' = \frac{1}{t}x + t^3$$

for $t > 0$.

b) Finn deretter den spesielle løsningen av ligningen slik at $x(1) = 1$.

Oppgave 2.

La $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ være funksjoner fra et endelig intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ inn i $\mathbb{R}^n$ og anta at alle komponentfunksjonene til $\mathbf{x}_k$ er kontinuerlige for $k = 1, \ldots, n$. Definer en funksjon Φ fra I inn $n \times n$ matrisene ved

$$\Phi(t) = [\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)]$$

(Fortsettes side 2.)

der $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ oppfattes som søylevektorer. Definer en funksjon $W : I \to \mathbb{R}$ som determinanten:

$$W(t) = \det(\Phi(t)) = |\Phi(t)|.$$

Se på følgende utsagn

A. De vektorvaluerte funksjonene $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ er lineært uavhengige

B. Vektorene $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ er lineært uavhengige for en $t \in I$.

C. Vektorene $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ er lineært uavhengige for hver $t \in I$

D. $W(t) \neq 0$ for en $t \in I$

E. $W(t) \neq 0$ for hver $t \in I$

a) I skjemaet $(*)$ i vedlegget, fyll ut de 25 spørsmålene med JA eller NEI ettersom implikasjonene er sanne eller ikke.
Du behøver ikke gi noen begrunnelse for svarene.

b) Anta nå i tillegg at hver av de vektorvaluerte funksjonene $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ er løsning av et lineært system av differensialligninger

$$\mathbf{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x}(t)$$

der $t \to \boldsymbol{A}(t)$ er en funksjon fra I inn i $n \times n$ matrisene slik at ethvert matriseelement er kontinuerlig. Fyll nå ut skjemaet $(**)$ i vedlegget når denne ekstrabetingelsen antas.
Igjen behøver du ikke begrunne svarene.

Oppgave 3.

Se på det følgende systemet av differensialligninger

$$(*) \qquad \begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{2}x - y - \tfrac{1}{2}(x^3 + xy^2) \\ y' &= x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}(y^3 + yx^2) \end{aligned}$$

a) Innfør polarkoordinater r, θ slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) &= r(t)\sin(\theta(t)) \end{aligned}$$

og transformer $(*)$ til et system av differensialligninger for r og θ.
(Hint: Uttrykk r og θ ved x og y og deriver med hensyn på t.)

(Fortsettes side 3.)

b) Løs det siste systemet eksplisitt når $\theta(0) = \theta_0$, $r(0) = r_0$.

c) Vis ved å bruke b) eller a) at systemet har nøyaktig et kritisk punkt og avgjør for eksempel ved å se på løsningen fra b) om det er stabilt, ustabilt, asymptotisk stabilt, sadelpunkt eller spiralpunkt. (Hvis du ikke kom fram i a) eller b) kan du avgjøre dette ved å linearisere omkring det kritiske punktet og finne egenverdiene til Jacobi-matrisen.)

d) Vis at hvis $(x(0), y(0)) \neq (0, 0)$, så vil $(x(t), y(t))$ nærme seg en lukket kurve når $t \to \infty$. Finn denne lukkete kurven og bestem perioden av bevegelsen langs kurven.

e) Skisser et faseportrett av systemet på grunnlag av informasjonen fra a)–d).

SLUTT