Modellsvar til eksamen i MAT-INF 1310
15 Juni 2006

1] a] Vi skal finne den generelle løsningen av

$$x' = \frac{1}{t}x + t^3$$

i.e.

$$x' - \frac{1}{t}x = t^3$$

Integrerende faktor:

$$e^{-\int \frac{dt}{t}} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$$

så ligningen blir

$$\frac{1}{t}x' - \frac{1}{t^2}x = t^2$$

eller
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}x\right) = t^2$$

Integrasjon:

$$\frac{1}{t}x = \frac{1}{3}t^3 + K$$

så
$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3}t^4 + Kt}}$$ der K er en vilkårlig konstant.

b) For at $x(1) = 1$ må vi kreve

$$\frac{1}{3} + K = 1 \iff K = \frac{2}{3}$$

så den spesielle løsningen med $x(1) = 1$ er

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3}t^4 + \frac{2}{3}t}}$$

2

2

Vedlegg

til eksamenssettet i MAT-INF1310, 15. juni 2006

Disse skjemaene skal brukes til besvarelsen av Oppgave 2 og skal legges ved eksamensbesvarelsen.
Her betyr $X \Rightarrow Y$ at utsagnet X impliserer Y, og du skal svare JA eller NEI på dette.

KANDIDATNR. ....

Til Oppgave 2a) (*)	
Implikasjon	Svar(JA/NEI)
$A \Rightarrow A$	Ja
$A \Rightarrow B$	Nei
$A \Rightarrow C$	Nei
$A \Rightarrow D$	Nei
$A \Rightarrow E$	Nei
$B \Rightarrow A$	Ja
$B \Rightarrow B$	Ja
$B \Rightarrow C$	Nei
$B \Rightarrow D$	Ja
$B \Rightarrow E$	Nei
$C \Rightarrow A$	Ja
$C \Rightarrow B$	Ja
$C \Rightarrow C$	Ja
$C \Rightarrow D$	Ja
$C \Rightarrow E$	Ja
$D \Rightarrow A$	Ja
$D \Rightarrow B$	Ja
$D \Rightarrow C$	Nei
$D \Rightarrow D$	Ja
$D \Rightarrow E$	Nei
$E \Rightarrow A$	Ja
$E \Rightarrow B$	Ja
$E \Rightarrow C$	Ja
$E \Rightarrow D$	Ja
$E \Rightarrow E$	Ja

Til Oppgave 2b) (**)	
Implikasjon	Svar(JA/NEI)
$A \Rightarrow A$	Ja
$A \Rightarrow B$	Ja
$A \Rightarrow C$	Ja
$A \Rightarrow D$	Ja
$A \Rightarrow E$	Ja
$B \Rightarrow A$	Ja
$B \Rightarrow B$	Ja
$B \Rightarrow C$	Ja
$B \Rightarrow D$	Ja
$B \Rightarrow E$	Ja
$C \Rightarrow A$	Ja
$C \Rightarrow B$	Ja
$C \Rightarrow C$	Ja
$C \Rightarrow D$	Ja
$C \Rightarrow E$	Ja
$D \Rightarrow A$	Ja
$D \Rightarrow B$	Ja
$D \Rightarrow C$	Ja
$D \Rightarrow D$	Ja
$D \Rightarrow E$	Ja
$E \Rightarrow A$	Ja
$E \Rightarrow B$	Ja
$E \Rightarrow C$	Ja
$E \Rightarrow D$	Ja
$E \Rightarrow E$	Ja

3 a) Vi har

$$\frac{d}{dt}\left(r^2(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(x^2+y^2\right)$$

$$= 2x'x + 2y'y$$

$$= 2x\left(\tfrac{1}{2}x - y - \tfrac{1}{2}\left(x^3 + xy^2\right)\right)$$

$$+ 2y\left(x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}\left(y^3 + yx^2\right)\right)$$

$$= x^2 - 2xy - x^4 - x^2y^2$$

$$+ 2xy + y^2 - y^4 - x^2y^2$$

$$= x^2 + y^2 - \left(x^2+y^2\right)^2 = r^2 - r^4$$

så

$$2rr' = r^2 - r^4$$

eller

$$\boxed{2r' = r - r^3}$$

Videre er

$$\theta(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$$

så

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{xy' - x'y}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}\left(xy^3 + yx^3\right) - \frac{1}{2}xy + y^2 + \frac{1}{2}\left(x^3y + xy^3\right)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Systemet av differensialligninger blir således

$$\boxed{\begin{aligned} 2r' &= r - r^3 \\ \theta' &= 1 \end{aligned}}$$

b) Differensialligningen for r er separabel:

$$(*) \quad \frac{2\,dr}{r(1-r)(1+r)} = dt$$

Ved delbrøkoppspalting finner vi

$$\frac{2}{r(1-r)(1+r)} = \frac{2}{r} + \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1+r}$$

så

$$\int \frac{2\,dr}{r(1-r)(1+r)} = \ln r^2 - \ln(r^2-1) - C$$

der C er en integrasjonskonstant. Fra (*) følger dermed

$$\ln\left(\frac{r^2}{r^2-1}\right) = t + C$$

eller

$$\frac{r^2}{r^2-1} = e^{t+C}$$

der C har en verdi for $r < 0$ og en annen for $r > 1$

Hvis $0 < r < 1$ finner vi

$$\frac{r^2}{1-r^2} = e^{t+c}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2\left(1+e^{t+c}\right) = e^{t+c}$$

(a) $$\Rightarrow \quad r = \frac{e^{\frac{1}{2}(t+c)}}{\sqrt{1+e^{t+c}}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-(t+c)}}}$$

Hvis $1 < r < \infty$ finner vi

$$\frac{r^2}{r^2-1} = e^{t+c}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2\left(1-e^{t+c}\right) = -e^{t+c}$$

så

(b) $$r = \frac{e^{\frac{1}{2}(t+c)}}{\sqrt{e^{t+c}-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-(t+c)}}}$$

Differensialligningen for θ er

$$\theta' = 1$$

som har løsningen

$$\theta = t + D$$

der D er en integrasjonskonstant.
Konstantene C og D kan nå bestemmes fra initialbetingelsene $\theta(0) = \theta_0$, $r(0) = r_0$.
Vi ser umiddelbart at $D = \theta_0$ og

$$\underline{\underline{\theta(t) = t + \theta_0}}$$

For r vil løsningen avhenge av r_0:

Hvis $r_0 = 0$ vil $\underline{\underline{r(t) = 0}}$ for alle t, så $(0,0)$ er et kritisk punkt

Hvis $0 < r_0 < 1$ ser vi ved å sette $t = 0$ i (a) ovenfor at $e^{-C} = (r_0^{-2} - 1)$ og

$$\underline{\underline{r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (r_0^{-2} - 1)e^{-t}}}}}$$

Hvis $r_0 = 1$, ser vi umiddelbart at $r = 1$ er en løsning av differensialligningen for r (fordi høyresiden $= 0$) så da er $\underline{\underline{r(t) = 1}}$

Hvis $r_0 > 1$ ser vi ved å sette $t = 0$ i (b) ovenfor at $e^{-C} = 1 - r_0^{-2}$, så

$$\underline{\underline{r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (r_0^{-2} - 1)e^{-t}}}}}$$

c) Vi ser fra b), at systemet har bare et kritisk punkt $\underline{\underline{r = 0}}$ (origo). Vi ser dessuten at hvis $r_0 > 0$ så er

$\underline{\lim_{t\to\infty} r(t) = 1}$ fordi $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$.

Dermed er $r=0$ et <u>ustabilt</u> kritisk punkt. Det er dessuten et <u>spiralpunkt</u> siden $\theta' = 1$, d.v.s. et punkt som starter nær origo beveger seg i en spiral ut mot sirkelen $r=1$

(Alternativt kunne vi avgjort dette ved å linearisere nær $(0,0)$. Jacobimatrisen i $(0,0)$ er

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

så den karakteristiske ligningen er

$(\lambda - \frac{1}{2})^2 + 1 = 0$

som har røttene $\lambda = \frac{1}{2} \pm i$

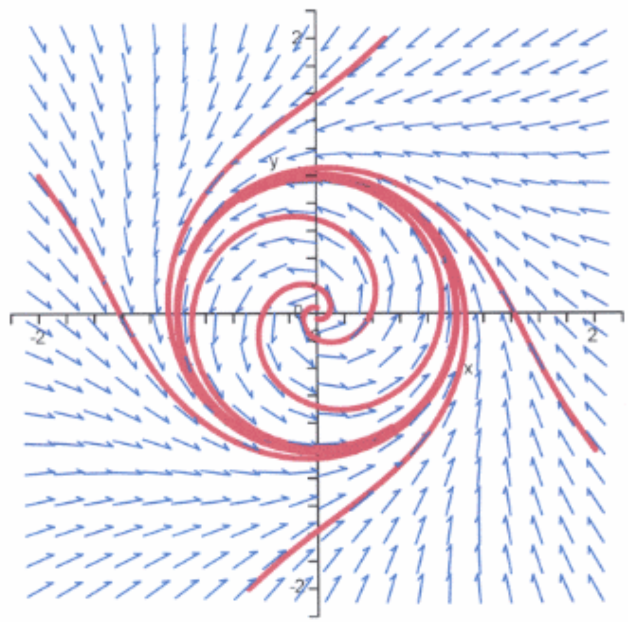
Da $\text{Re}\,\lambda = \frac{1}{2} > 0$ er det kritiske punktet ustabilt, og da egenverdiene er komplekse er det kritiske punktet et spiralpunkt.

d) Vi ~~[illegible]~~ ser fra løsningen i b) at hvis $r_0 > 0$, så er $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$, så løsningskurven

vil nærme seg sirkelen $r = 1$ når
$t \to \infty$. Da $\theta' = 1$ vil dessuten perioden
av bevegelsen langs sirkelen være 2π.
(For å svare på dette er det nok å
kjenne differensialligningene i a) ;
hvis $0 < r < 1$ er $r' = \frac{1}{2}(r - r^3) > 0$
så $r(t)$ er voksende med t. Hvis
$1 < r$ er $r' = \frac{1}{2}(r^2 - r^3) < 0$ så $r(t)$
er avtakende med t)

e) Faseportrett av systemet.

```
> with(DEtools):
> phaseportrait([D(x)(t)=x(t)/2-y(t)-(x(t)*x(t)*x(t)+x(t)*y(t)*y(t))
  /2,D(y)(t)=x(t)+y(t)/2-(y(t)*y(t)*y(t)+y(t)*x(t)*x(t))/2
  ],[x(t),y(t)],t=0..10,[[x(0)=0,y(0)=-0.04],
  [x(0)=0,y(0)=0.04],[x(0)=-0.5,y(0)=-2],[x(0)=2,y(0)=-1],[x(0)=0.5,y(0)=2],[
```




```
>
```

(Dette bildet er komputergenerert, men kunne blitt laget på grunnlag av svarene i oppgaven)