Oblig i MAT-INF 1310, Vår 2006

Oppgave 1

$$\frac{dx}{dt} = x' = \frac{t+1}{2x} \quad , \quad x(0) = 0$$

$$d(x^2) = 2x\,dx = (t+1)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \tfrac{1}{2}t^2 + t + C$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow \cancel{x}\ C = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1 + t + \tfrac{1}{2}t^2}$$

$1 + t + \frac{1}{2}t^2$ er minimal for $\cancel{t}$ $1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1$
og minimalverdien er $\frac{1}{2} > 0$ så

$$\underline{\underline{x = \sqrt{1 + t + \tfrac{1}{2}t^2}}}$$

Oppgave 2

(i) Vi har $m x'' = -t\,x'^{\alpha}$ der $\alpha > 0$

og $x(0) = 0$ og $x'(0) = 1$ og $m = 1$

Sett $y = x'$. Da blir

$$y' = -t\,y^{\alpha} \quad \text{der } y(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -y^{-\alpha}\,dy = t\,dt$$

$\Leftrightarrow$ Hvis $\alpha \neq 1$ integreres dette til

$$\frac{y^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{1}{2}t^2 + C'$$

$$\Leftrightarrow \quad y^{1-\alpha} = \frac{\alpha-1}{2}t^2 + C''$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \left(\frac{\alpha-1}{2}t^2 + C''\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$y(0)=1 \Rightarrow C''=1$ og

$$\underline{\underline{y = \left(1 + \frac{\alpha-1}{2}t^2\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}}$$

~~[illegible]~~

Hvis $0<\alpha<1$ er $\frac{\alpha-1}{2}<0$ så vi ser at hastigheten $x'=y$ blir 0 for $1+\frac{\alpha-1}{2}t^2=0$, d.v.s. for $t^2 = \frac{2}{1-\alpha}$ i.e. $t=\sqrt{\frac{2}{1-\alpha}}$. Partikkelen faller derved til ro i tidspunktet

Det siste spørsmålet i oppgaven har ikke velformulert, for det er ikke klart hva $(x')^{\alpha}$ er når $x'<0$

$$\underline{\underline{t_0 = \sqrt{\frac{2}{1-\alpha}}}} \quad \text{hvis } 0<\alpha<1$$

Hvis $\alpha > 1$ er $\frac{\alpha - 1}{2} > 0$, så vi sett at

$$x' \sim t^{\frac{2}{1-\alpha}} \quad \text{for store } t.$$

For at $\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} \int_0^t x'(s)\,ds$ skal være endelig må derfor

$$\int_0^\infty ds \; s^{\frac{2}{1-\alpha}} < \infty$$

d.v.s. $\frac{2}{1-\alpha} < -1$

$\Leftrightarrow$ Hvis $\alpha > 1$ betyr dette at

$$\frac{2}{\alpha - 1} > 1 \Leftrightarrow \alpha < 3$$

Vi ser dermed at

$$\lim_{t \to \infty} x(t) \begin{cases} < +\infty & \text{for } 1 < \alpha < 3 \\ = +\infty & \text{for } \alpha \geq 3 \end{cases}$$

Dermed $\alpha_0 = \underline{\underline{3}}$

Til slutt, hvis $\alpha = 1$ er ligningen

$$\frac{dy}{y} = -t\,dt$$

så
$$\ln y = -\frac{1}{2}t^2 + C'$$

og
$$y = e^{C'} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Da $y(0) = 1$ må $C' = 0$, $e^{C'} = 1$

så
$$y = x' = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Dermed er
$$x(t) = \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds$$

og da
$$\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} < \infty$$

følger at
$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

eksisterer i dette tilfellet og selv om hastigheten aldri blir 0.

(ii) Anta så at F er uavhengig av t:

$$m x'' = F(x, x')$$

og anta at $y = x' = y(x)$. Da er

$$x'' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}\, y$$

så Newtons lov blir

$$(*) \quad m y \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

Hvis ~~må~~

$$F(x, x') = -x(x')^2 + x^2 (x')^4$$

er $F(x, y) = -x y^2 + x^2 y^4$

så Newtons lov blir

$$m y \frac{dy}{dx} = -x y^2 + x^2 y^4$$

eller

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{m} y = \frac{x^2}{m} y^3$$

Dette er en Bernoulli ligning (ED, s. 60) med $P(x) = \frac{x}{m}$, $Q(x) = \frac{x^2}{m}$, $n = 3$

Substitusjonen og $v = y^{1-3} = y^{-2}$ transformerer denne ligningen til

$$\frac{dv}{dx} + (1-3)\frac{x}{m}v = (1-3)\frac{x^2}{m}$$

i.e. $$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{m}xv = -\frac{2}{m}x^2$$

Integrerende faktor: $e^{-\frac{2}{m}\int x\,dx} = e^{-\frac{x^2}{m}}$

Ligningen blir

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{m}}v\right) = -\frac{2}{m}x^2 e^{-\frac{x^2}{m}}$$

så $$e^{-\frac{x^2}{m}}v = -\frac{2}{m}\int y^2 e^{-\frac{y^2}{m}}dy + C'$$

Delvis integrasjon gir

$$\int y^2 e^{-\frac{y^2}{m}}dy = \int \underbrace{y}_{u}\underbrace{\left(y e^{-\frac{y^2}{m}}\right)}_{w'}dy$$

$$= -\frac{m}{2}y e^{-\frac{y^2}{m}} + \frac{m}{2}\int e^{-\frac{y^2}{m}}dy$$

men det siste integralet kan ikke uttrykkes ved elementære funksjoner

Da $v = y^{-2}$ og $y(0) = 1$ må $v(0) = 1$ og da $x(0) = 0$ ~~får~~ vi og $v(0) = 1$ hvis v oppfattes som en funksjon av x. Dermed

$$\cancel{v(x)} = e^{-\frac{x^2}{m}} y(x)^{-2}$$

$$= -\frac{2}{m} \int_0^x z^2 e^{-\frac{z^2}{m}} dz + 1$$

så

$$y(x) = \left(e^{\frac{x^2}{m}} \left(1 - \frac{2}{m} \int_0^x z^2 e^{-\frac{z^2}{m}} dz\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2m}} \left(1 - \frac{2}{m} \int_0^x z^2 e^{-\frac{z^2}{m}} dz\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Da $y = x'$ fåes herav

$$\int \frac{e^{\frac{x^2}{2m}} dx}{\sqrt{1 - \frac{2}{m} \int_0^x z^2 e^{-\frac{z^2}{m}} dz}} = \int dt = t + C$$

og da $x(0) = 0$ følger

$$\int_0^x \frac{e^{\frac{v^2}{2m}}\, dv}{\sqrt{1 - \frac{2}{m}\int_0^v z^2 e^{-\frac{z^2}{m}} dz}} = t$$

Denne ligningen kan løses m. h. p. x for å gi $x = x(t)$

(iii) Hvis F bare avhenger av x ser vi at F er konservativ og introduserer

$$V(x) = -\int_0^x F(y)\,dy$$

Da kan $(*)$ skrives

$$m y \frac{dy}{dx} = F(x)$$

i.e.

$$\frac{m}{2}\frac{d(y^2)}{dx} = F(x)$$

så ved integrasjon

$$\frac{m}{2}\left(y^2(x) - y^2(0)\right) = \int_0^x F(z)\,dz$$

$$= -V(x)$$

Dermed $\frac{m}{2} y^2 + V(x) = \frac{m}{2} y^2(0) = \text{konstant} = E$

(iv) Da $y = x'$ følger ~~fra~~ (iii) at

$$\frac{m}{2} x'^2 + V(x) = E$$

eller $x' = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - V(x)}$

Dette er en første ordens differensialligning i x som kan løses ved separasjon av variable

$$\frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}}\, dt$$

så vi får en ligning av formen

$$G(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}}\, t + C$$

som kan løses m. h. p. x for å gi x som en funksjon av t.

Hvis f. eks. $m = 2$, $E = 1$ og $V(x) = x^2$

fås
$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pm dt$$

så $\arcsin(x) = \pm t + C$

Da $x(0) = 0$ fås $C = 0$ og da

$x'(0) > 0$ må vi velge fortegnet $+$

så

$$\arcsin x = t$$

$$\iff \underline{\underline{x = \sin t}}$$

som ikke overraskende er en harmonisk svingning

<u>Oppgave 3</u>

$$x' = x^2 - y^2$$

$$y' = x - y$$

Uavhengig parameter $= t$

(i) Vi ønsker å løse systemet med Picards metode når $x(0) = b_1$; $y(0) = b_2$

. Skjemaet er

$$x_{n+1}(t) = b_1 + \int_0^t (x_n(s)^2 - y_n(s)^2)\, ds$$

$$y_{n+1}(t) = b_2 + \int_0^t (x_n(s) - y_n(s))\, ds$$

Vi får

$$x_0(t) = b_1$$

$$y_0(t) = b_2$$

$$x_1(t) = b_1 + \int_0^t (b_1^2 - b_2^2)\,ds$$

$$= b_1 + (b_1^2 - b_2^2)t$$

$$y_1(t) = b_2 + \int_0^t (b_1 - b_2)\,d(s)$$

$$= b_2 + (b_1 - b_2)t$$

$$x_2(t) = b_1 + \int_0^t \Big(\big(b_1 + (b_1^2 - b_2^2)s\big)^2 - \big(b_2 + (b_1 - b_2)s\big)^2 \Big)\,ds$$

$$= b_1 + \int_0^t \Big(b_1^2 + 2b_1(b_1^2 - b_2^2)s + (b_1^2 - b_2^2)^2 s^2 - b_2^2 - 2b_2(b_1 - b_2)s - (b_1 - b_2)^2 s^2 \Big)\,ds$$

$$= b_1 + \int_0^t \Big((2b_1^3 - 2b_1 b_2^2 - 2b_1 b_2 + 2b_2^2)s + (b_1^4 - 2b_1^2 b_2^2 + b_2^4 - b_1^2 + 2b_1 b_2 - b_2^2)s^2 \Big)\,ds$$

så

$$x_2(t) = b_1 + (b_1^2 - b_2^2)t + (b_1^3 - b_1 b_2^2 - b_1 b_2 + b_2^2)t^2 + \frac{1}{3}(b_1^4 - 2b_1^2 b_2^2 + b_2^4 - b_1^2 + 2b_1 b_2 - b_2^2)t^3$$

$$y_2(t) = b_2 + \int_0^t \left(b_1 + (b_1^2 - b_2^2)s - b_2 - (b_1 - b_2)s\right) ds$$

$$= b_2 + (b_1 - b_2)t + \frac{1}{2}(b_1^2 - b_2^2 - b_1 + b_2)t^2$$

(ii) $x(t)$, $y(t)$ er en konstant løsning hvis $x'(t) = 0$, $y'(t) = 0$ for alle t, d.v.s

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$$

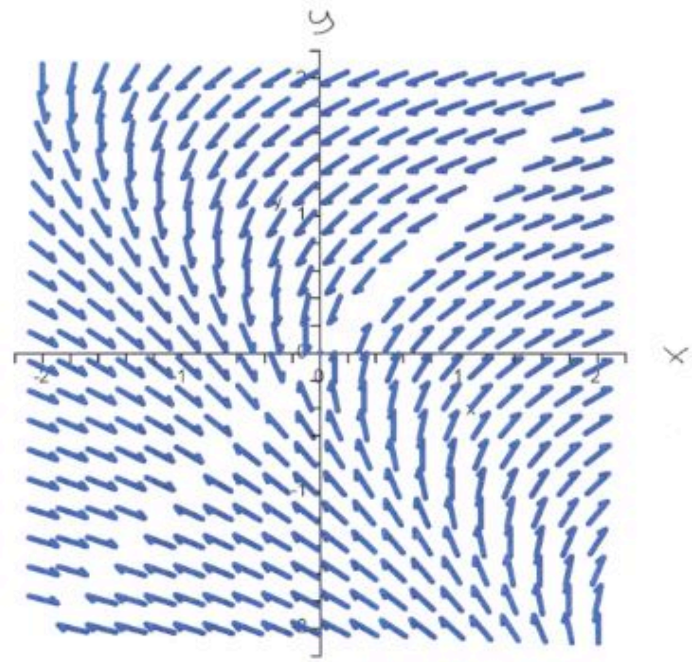
$$x - y = 0$$

så de konstante løsningene er

$$x = y = a \quad , \text{der } a \in \mathbb{R}$$

(iii) se s 13

```
> with(DEtools):
> dfieldplot([diff(x(t),t)=x(t)*x(t)-y(t)*y(t),
> diff(y(t),t)=x(t)-y(t)],[x(t),y(t)], t=-2..2,x=-2..2, y=-2..2,
> color=blue);
>
>
>
```



d := dfieldplot :

g1 := :

g2 := :

display({d, g1, g2 ...});

(iv) Vi har

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x'}{y'} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = x+y$$

Så

$$\frac{dx}{dy} - x = y$$

Dette er en lineær første ordens ligning som kan løses ved integrerende faktor.

$$\frac{d}{dy}\left(e^{-y}x\right) = y e^{-y}$$

så

$$\begin{aligned} e^{-y}x &= \int \underset{v}{y}\, \underset{u'}{e^{-y}}\, dy + C^* \\ &= -y e^{-y} + \int e^{-y}dy + C^* \\ &= -y e^{-y} - e^{-y} + C^* \end{aligned}$$

i.e. løsningskurvene er

$$\underline{\underline{x = C e^{y} - 1 - y}}$$

der $C \in \mathbb{R}$. Se 15

```
> with(DEtools):with(plots):
> d:=dfieldplot([diff(x(t),t)=y(t)-x(t),
  diff(y(t),t)=y(t)*y(t)-x(t)*x(t)],[x(t),y(t)], t=-2..2, x=-2..2, y=-2..2,
  color=blue):
> f1:=x->exp(x)-1-x;
```

$$f1 := x \to e^x - 1 - x$$

```
> g1:=plot(f1(x),x=-2..2,-2..2,color=red):
> f0:=x->-1-x;
```

$$f0 := x \to -1 - x$$

```
> g0:=plot(f0(x),x=-2..2,-2..2,color=red):
> fm1:=x->-exp(x)-1-x;
```

$$fm1 := x \to -e^x - 1 - x$$

```
> gm1:=plot(fm1(x),x=-2..2,-2..2,color=red):
> f2:=x->2*exp(x)-1-x;
```

$$f2 := x \to 2\,e^x - 1 - x$$

```
> fm2:=x->-2*exp(x)-1-x;
```

$$fm2 := x \to -2\,e^x - 1 - x$$

```
> g2:=plot(f2(x),x=-2..2,-2..2,color=red):
> gm2:=plot(fm2(x),x=-2..2,-2..2,color=red):
> f3:=x->3*exp(x)-1-x;
```

$$f3 := x \to 3\,e^x - 1 - x$$

```
> f4:=x->4*exp(x)-1-x;
```

$$f4 := x \to 4\,e^x - 1 - x$$

```
> fm3:=x->-3*exp(x)-1-x;
```

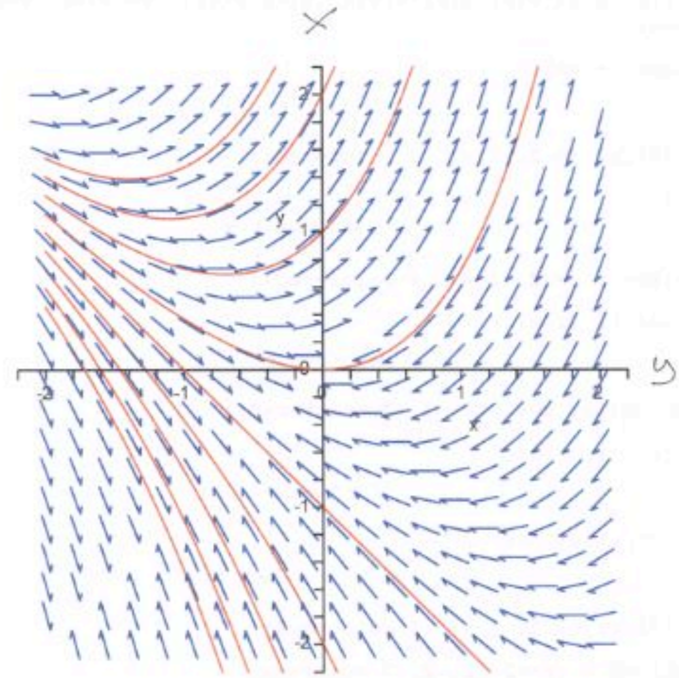
$$fm3 := x \to -3\,e^x - 1 - x$$

```
> fm4:=x->-4*exp(x)-1-x;
```

$$fm4 := x \to -4\,e^x - 1 - x$$

```
> g3:=plot(f3(x),x=-2..2,-2..2,color=red):
> g4:=plot(f4(x),x=-2..2,-2..2,color=red):
> gm3:=plot(fm3(x),x=-2..2,-2..2,color=red):
> gm4:=plot(fm4(x),x=-2..2,-2..2,color=red):
> display({d,gm1,gm2,gm3,gm4,g0,g1,g2,g3,g4});
```

16:



(v) Hvis $(x(0), y(0)) = (\frac{1}{4}, 0)$

må C være slik at

$$\frac{1}{4} = C - 1 - 0$$

i.e. $C = 1 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$

og en ligning for grafen er

$$x = \frac{5}{4} e^{y} - 1 - y$$

Vi ser av retningsdiagrammet at

da vil $t \to \pm\infty$ svare til $y \to \pm\infty$

Vi har

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{5}{4} e^{y} - 1 - y}{y} = \frac{\frac{5}{4} e^{y}}{y} - \left(\frac{1}{y} + 1\right)$$

Dermed vil

$$\frac{x}{y} \longrightarrow \infty \quad \text{når } t \to \infty \ (\text{i.e. } y \to \infty)$$

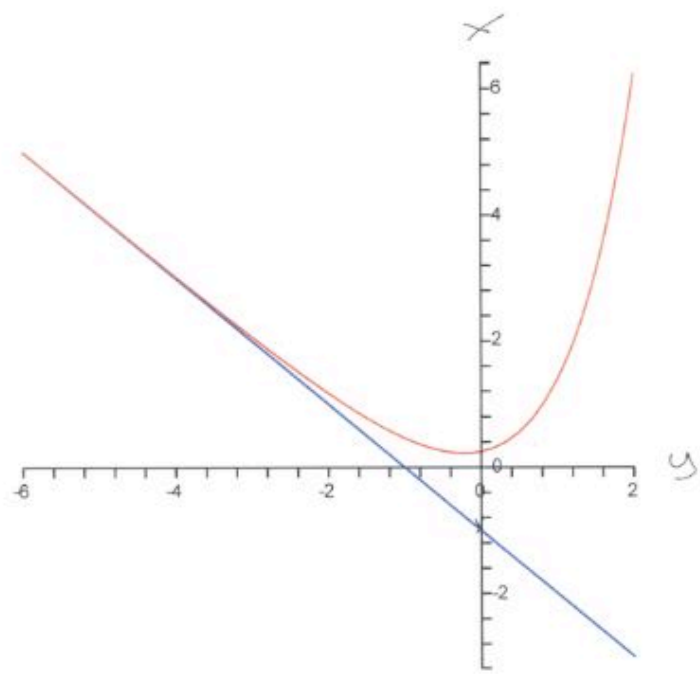
men $\frac{x}{y} \to -1$ når $t \to -\infty$ (i.e. $y \to -\infty$

Da $x + y + 1 = \frac{5}{4} e^{y}$ ser vi at linjen $x + y + 1 = 0$ er en asymptote når $t \to -\infty$

```
> with(DEtools):
> with(plots):
> f:=y->5*exp(y)/4-1-y;
```

$$f := y \rightarrow \frac{5}{4}e^{y} - 1 - y$$

```
> p1:=plot(f(y),y=-6..2,color=red):
> p2:=plot(-1-y,y=-6..2,color=blue):
> display({p1,p2});
```




```
>
```