1. obligatoriske oppgave i MAT-INF 1310, Vår 2006

Innleveringsfrist: Fredag 17. mars, kl. 14.30.

Oppgave 1. Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dx}{dt} = x' = \frac{t+1}{2x}\,, \qquad x(0) = 1$$

Oppgave 2. Hvis en partikkel med masse m beveger seg i en dimensjon og har posisjonen $x(t)$ ved tiden t, så gjelder Newtons kraftlov

$$mx'' = F(t, x, x')$$

der m er massen, $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ er akselerasjonen og kraften F er en funksjon av tiden t, posisjonen x og hastigheten x'.

(i) Anta først at F er en friksjonskraft som er proporsjonal med en positiv potens α av hastigheten x' og som vokser lineært med tiden, i.e.

$$F(t, x, x') = -t(x')^{\alpha}$$

Anta dessuten at $x(0) = 0$ og $x'(0) = 1$ og at $m = 1$.
Vis at hastigheten $x'(t)$ konvergerer mot 0 når $t \to \infty$ for alle $\alpha \geq 1$. Vis at det finnes en konstant α_0 slik at $\lim_{t\to\infty} x(t)$ er endelig når $1 \leq \alpha < \alpha_0$ men $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$ når $\alpha_0 \leq \alpha$. Vis at hvis $0 < \alpha < 1$, så vil hastigheten avta til 0 ved en endelig tid $t_0 > 0$ og beregn t_0. Vis at løsningen av differensial-ligningen ikke er entydig i dette tilfellet men det er en entydig løsning som er konstant for $t \geq t_0$.

(I denne oppgaven vil du finne uttrykk for $x(t)$ som involverer integraler som ikke kan beregnes eksplisitt, men spørsmålene ovenfor kan allikevel besvares.)

(ii) Hvis kraften F er uavhengig av t, så tar Newtons kraftlov formen

$$mx'' = F(x, x')$$

og hvis da hastigheten $y = x'$ er en funksjon av x, $y = y(x)$, så vis at

$$(*) \qquad my\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

Bruk dette til å finne $x(t)$ hvis

$$F(x, x') = -x(x')^2 + x^2(x')^4$$

og

$$x(0) = 0 \qquad \text{og} \qquad x'(0) = 1$$

(iii) Hvis F bare avhenger av posisjonen x sier vi at F er *konservativ* og vi introduserer potensialet $V(x) = -\int_0^x F(x)dx$.
Vis at hvis $y = y(x)$ da er en løsning av $(*)$ så er

$$\tfrac{1}{2}my(x)^2 + V(x)$$

uavhengig av x. (Den konstante verdien E av dette uttrykket kalles den totale energien til partikkelen. $\frac{1}{2}my^2$ er den kinetiske energien og $V(x)$ den potensielle energien.)

(iv) Vis under betingelsene i (iii) at

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,\sqrt{E - V(x)}$$

Beskriv hvordan dette kan brukes til finne $x(t)$ hvis $x(0)$ og $x'(0)$ er gitt, og bruk metoden til å finne $x(t)$ hvis $m = 2$, $E = 1$ og $V(x) = x^2$ = harmonisk oscillator potensialet. Anta at $x(0) = 0$ og $x'(0) > 0$.

Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi se på det koplete systemet

$$x' = x^2 - y^2 \qquad y' = x - y$$

av differensialligninger, der $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$

(i) Bruk Picards metode på side 680–681 i EP til å regne ut de tre første approksimasjonene $(x_0(t), y_0(t)), (x_1(t)), y_1(t)),\ x_2(t), y_2(t))$ til løsningene for en generell initialbetingelse $x(0) = b_1$, $y(0) = b_2$.

(ii) Finn alle konstante løsninger av systemet, d.v.s. finn alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ slik at paret $x(t) = a$, $y(t) = b$ av konstante funksjoner er en løsning.

(iii) Lag et plot av retningsfeltet til dette systemet (d.v.s. plot vektoren (x', y') som en funksjon av (x, y)) ved å bruke et matematikkprogram som `Maple` eller `Matlab` (se side 479–480 i EP). Oppgi kommandoene du bruker i programmet.

(iv) Ved å bruke

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x'}{y'}$$

finner vi en første ordens differensialligning for x som en funksjon av y. Løs denne og plot grafene til endel løsningskurver. Sammenlign resultatene med resultatene fra (iii).

(v) Plot og beskriv hva som skjer med løsningskurven som starter i $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ ved $t = 0$ når $t \to +\infty$ og $t \to -\infty$.

SLUTT