2. obligatoriske oppgave i MAT-INF 1310, Våren 2006

Innleveringsfrist: Fredag 28. april, kl. 14.30.

Oppgave 1.

(i) Finn egenverdiene og de generaliserte egenvektorene til

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(ii) Bruk resultatene fra 1(i) til å beregne $e^{t\mathbf{A}}$ og til å løse initialverdiproblemet

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2. En fuglepopulasjon er styrt av en differensialligning

$$\frac{dp}{dt} = \mu(t)p - kp$$

der $k \geq 0$ er dødsraten og $\mu(t) \geq 0$ representerer en variabel fødselsrate som er kontinuerlig og periodisk med periode 1 år. Tiden t måles i år. Vi antar at $p(0) > 0$. La $\mu_0 = \sup\{\mu(t) | 0 \leq t \leq 1\}$.

(i) Finn $p(t)$ når $p(0)$ er gitt og vis at

$$p(0)e^{-kt} \leq p(t) \leq p(0)e^{(\mu_0 - k)t}$$

(ii) Vis at det finnes en konstant V slik at

$$p(t+1) = Vp(t)$$

for alle $t > 0$, og beregn V.

(iii) Gi en nødvendig og tilstrekkelig betingelse på μ for at fuglepopulasjonen skal holde seg begrenset når $t \to \infty$ uten å dø ut. Formuler betingelsen i ord og forklar at den er naturlig . Gi også nødvendige og tilstrekkelige betingelser på μ for at $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$ og $\lim_{t\to\infty} p(t) = +\infty$.

Oppgave 3 I denne oppgaven skal vi generalisere resultater fra kapittel 5 i EP til systemer av lineære differensialligninger med variable koeffisienter. (Spørsmål (ii) i denne oppgasven er muligensen en nøtt, men hvis du står fast så bare gå videre med (iii).)

(i) La $\mathbf{A}(t)$ være en funksjon fra $\mathbb{R}$ inn i $n \times n$ matrisene med kontinuerlige matriseelementer. Forklar fra kjente teoremer at det finnes en funksjon $\mathbf{\Phi}(t)$ fra $\mathbb{R}$ inn i $n \times n$ matrisene med deriverbare matriseelementer slik at

$$\frac{d\mathbf{\Phi}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)$$

$\mathbf{\Phi}(t)$ kalles en fundamentalmatrise. Indiker hvordan $\mathbf{\Phi}(t)$ kan konstrueres slik at $\det(\mathbf{\Phi}(t_0)) \neq 0$ for en $t_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) La $W(t) = \det(\mathbf{\Phi}(t))$ være Wronsky-determinanten til systemet. Vis at

$$W(t) = W(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t} tr(\mathbf{A}(s))ds)$$

der

$$tr \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{pmatrix} = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$$

(Hint: Hvis $\mathbf{\Phi}(t) = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ der $\mathbf{x}_k$ er søylevektorer, så er

$$\frac{d}{dt}(\det(\mathbf{\Phi}(t))) = \det([\mathbf{x}_1', \dots, \mathbf{x}_n]) + \cdots + \det([\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n']$$

ved å ekspandere determinanten og bruke Leibnitz regel for derivasjon av produkter av n funksjoner.)

(iii) Bruk (ii) til å vise at siden $W(t_0) \neq 0$ så er $W(t) \neq 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$

(iv) La nå $\mathbf{f}(t)$ være en funksjon fra $\mathbb{R}$ inn i $\mathbb{R}^n$. Vis at løsningen av systemet

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

med initialbetingelsen $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ er gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\mathbf{f}(s)ds$$

(v) Sjekk at det lineære systemet av differensialligninger

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{1-t^2}\begin{bmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

har de to løsningene $\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ for $-1 < t < 1$ Bruk dette til å finne løsningen hvis

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

er gitt for en $t_0 \in \langle -1, 1 \rangle$

(vi) Finn så løsningen av

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{1-t^2}\begin{bmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

når

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

der $-1 < t$, $t_0 < 1$

SLUTT