UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF2360 — Anvendelser av lineær algebra prøveeksamen
Eksamensdag:	Fredag 16. mai 2014
Tid for eksamen:	00.00 – 23.59
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenssettet inneholder 12 deloppgaver, og alle deloppgaver teller like mye. Avsluttende eksamen vil inneholde like mange deloppgaver, og vil ha omtrent samme vanskelighetsgrad.

Oppgave 1 Fourierrekker

Regn ut den komplekse Fourierrekka til funksjonen som er periodisk med periode T, og som er definert ved at $f(t) = e^{2\pi it/(0.49\cdot T)}$ på $[0,T]$ (her er altså funksjonen vår kompleks, som er litt uvant for oss). Kan du tenke deg en forklaring hvorfor y_2 er den største av Fourierkoeffisientene?

Løsningsforslag: Legg merke til at $e^{2\pi it/(0.49\cdot T)}$ er periodisk med periode $0.49T$. Dette betyr at f har en diskontinuitet ved $t = T$, og denne gjør at mange y_n bidrar i Fourierrekka. Vi får at

$$\begin{aligned}
y_n &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{2\pi it/(0.49\cdot T)}e^{-2\pi int/T}dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{(2/0.49-2n)\pi it/T}dt \\
&= \frac{1}{T}\left[\frac{T}{(2/0.49-2n)\pi i}e^{(2/0.49-2n)\pi it/T}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{T}\frac{T}{(2/0.49-2n)\pi i}\left(e^{(2/0.49-2n)\pi i}-1\right) = \frac{e^{(2/0.49-2n)\pi i}-1}{(2/0.49-2n)\pi i}.
\end{aligned}$$

Når n er 2 så er $2/0.49 - 2n$ nær 0, og da er uttrykket veldig nær 1 ($(e^x - 1)/x \to 1$ når $x \to 0$). For andre n er nevneren stor, slik at y_n da er nær 0. Dette stemmer overens med at funksjonen er veldig nær $e^{2\pi 2it/\cdot T)}$, dvs en ren tone med frekvens $\nu = 2$, som jo har $y_2 = 1$ og andre $y_n = 0$.

Oppgave 2 Lyd og DFT

2a

I en wav-fil med en lydkanal har vi samplet lyd med samplingsfrekvens $f_s = 44100$Hz. Anta at det er 2^{23} lydsampler i filen, og at du gjør en DFT av lengde N på lydsamplene. Hvis du skal nulle ut frekvenser mellom 5000Hz

(Fortsettes på side 2.)

og 8000Hz, hvilke DFT-indekser er det da som skal nulles ut?
Løsningsforslag: Den rene tonen med frekvens ν har formen $e^{2\pi i\nu t}$. Samples denne med frekvens f_s er samplingstidspunktene $t_k = k/f_s$, der k går fra 0 til $N-1$, slik at vi får samplene $e^{2\pi i\nu k/f_s}$. Skal dette svare til DFT-indeks n så må $e^{2\pi i\nu k/f_s} = e^{2\pi ikn/N}$, slik at $\nu/f_s = n/N$, slik at $n = N\nu/f_s$. 5000Hz svarer derfor til DFT-indeks $n = 2^{23} \cdot 5000/44100 \approx 951089$, mens 8000Hz svarer til DFT-indeks $n = 2^{23} \cdot 8000/44100 \approx 1521743$. Vi må derfor nulle ut DFT-indekser $[951089, 1521743]$. Vi må også huske på at DFT-indekser $n, N-n$ svarer til samme frekvens, slik at vi må også nulle ut DFT-indeksene $[2^{23} - 1521743, 2^{23} - 951089]$.

2b

Vi kjører følgende kode på en lydfil:

```
[S,fs]=wavread('castanets.wav');
S=S(1:2^(17),1);
N=length(S);
newS=[S(1)-S(N); S(2:N)-S(1:(N-1))];
newS=newS/max(abs(newS));
playerobj=audioplayer(newS,fs);
playblocking(playerobj)
```

Hva gjør koden, og hvilket filter er det som blir kjørt på lyden? Hvilke endringer gjør filteret med lyden? Hvorfor er den tredje nederste linja nødvendig?
Løsningsforslag: Koden leser fra en lydfil, og trekker ut det 2^{17} første lydsamplene fra den første lydkanalen. Deretter anvender den filteret $S\{\underline{1}, -1\}$ (her brukes vektoroperasjoner for å anvende filteret) Dette er et høypassfilter, siden frekvensresponsen er $\lambda_S(\omega) = 1 - e^{-i\omega} = 2ie^{-i\omega/2}\sin(\omega/2)$ (og dermed $\lambda_S(0) = 0$, $\lambda_S(\pi) = 2$). Filteret vil dermed redusere bassen i lyden. På tredje nederste linje skaleres lydsamplene for å unngå verdier utenfor $[-1, 1]$, som jo maskinen ikke kan avspille. Til slutt avspilles lyden.

Oppgave 3 Filtre

Et filter S er definert ved likningen

$$z_n = \frac{1}{16}(x_n + 4x_{n-1} + 6x_{n-2} + 4x_{n-3} + x_{n-4}).$$

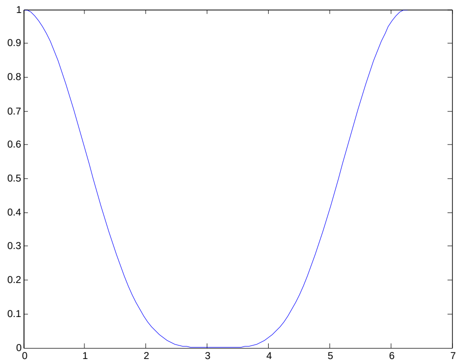
3a

Regn ut og plott (magnituden til den kontinuerlige) frekvensresponsen til filteret, dvs $|\lambda_S(\omega)|$. Er filteret et lavpassfilter eller et høypassfilter?
Løsningsforslag: Vi har at

$$\lambda_S(\omega) = \frac{1}{16}(1+4e^{-i\omega}+6e^{-2i\omega}+4e^{-3i\omega}+e^{-4i\omega}) = \frac{1}{16}e^{-2i\omega}(2\cos(2\omega)+8\cos\omega+6).$$

Vi ser at $\lambda_S(0) = 1$, og at $\lambda_S(\pi) = 0$, slik at filtreret er et lavpasssfilter. Figur 1 viser $|\lambda_S(\omega)|$.

(Fortsettes på side 3.)



Figur 1: Plott av $|\lambda_S(\omega)|$

3b

Skriv ned en 12×12 sirkulant Toeplitz-matrise som svarer til å anvende S. Finn en vektor $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ slik at $S\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (med andre ord, S er ikke inverterbar).
Løsningsforslag: En 12×12 sirkulant Toeplitz-matrise blir

$$\frac{1}{16}\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 6 & 4 \\
4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 6 \\
6 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 4 \\
4 & 6 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 4 & 6 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 6 & 4 & 1
\end{pmatrix}.$$

Siden $\lambda_S(\pi) = 0$, så er $\lambda_S(2\pi(N/2)/N) = \lambda_{S,N/2} = 0$ (evt. sett $N = 12$). Derfor er $\lambda_{S,N/2} = 0$ en egenverdi, slik at S ikke er inverterbar. $S\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ hvis vi velger $\boldsymbol{x}$ til å være den tilhørende egenvektoren, d.v.s. vi kan sette $\boldsymbol{x} = \phi_{N/2}$.

(Fortsettes på side 4.)

3c

Et annet filter S_2 har frekvensrespons $\lambda_{S_2}(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega})$. Hva blir filterkoeffisientene til $(S_2)^4$, d.v.s. filteret du får når du anvender S_2 4 ganger etter hverandre?
Løsningsforslag: Vi har at

$$\begin{aligned}\lambda_{(S_2)^4}(\omega) &= (\lambda_{S_2}(\omega))^4 = \left(\frac{1}{2}(1+e^{-i\omega})\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}(1 + 4e^{-i\omega} + 6e^{-2i\omega} + 4e^{-3i\omega} + e^{-4i\omega}) = \lambda_S(\omega).\end{aligned}$$

Vi har derfor at $(S_2)^4 = S = \frac{1}{16}\{\underline{1}, 4, 6, 4, 1\}$.

Oppgave 4 Tensorprodukter

Hvis f er en funksjon, og x_i er funksjonsverdier til f samplet uniformt, så gir

$$z_n = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}$$

en tilnærming til den andrederiverte i de samme punktene (opp til multiplikasjon med en konstant). La oss kalle det tilsvarende filteret for S.

4a

Bruk tilnærmingen til den andrederiverte over til å skrive opp et computational molecule som svarer til at man først dobbelderiverer alle radene, deretter dobbelderiverer alle søylene.
Løsningsforslag: Filteret for tilnærmingen til den andrederiverte er $S = \{1, \underline{-2}, 1\}$. Vi skal anvende dette på radene og søylene, og dette svarer til å anvende $S \otimes S$ på matrisen vår. Vi har lært at $S \otimes S$ har computational molecule

$$\mathrm{rev}(\boldsymbol{t}) \otimes \mathrm{rev}(\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{-2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{-2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & \underline{4} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

der $\boldsymbol{t}$ er filterkoeffisientene.

4b

Hva blir effekten av at du anvender tensorproduktene $S \otimes I$, $I \otimes S$, og $S \otimes S$ på et bilde representert ved en matrise X?
Løsningsforslag: S er et høypassfilter. Dette kan du enten begrunne ved at derivasjon er et høypassfilter, og siden dobbelderivasjon er derivasjon to ganger, så er også dette et høypassfilter (en sammensetning av to høypassfiltre er også et høypassfilter), eller du kan regne ut direkte:

$$\lambda_S(\omega) = e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega} = 2\cos\omega - 2.$$

Her er det klart at $\lambda_S(0) = 0$, og at $\lambda_S(\pi) = -4$, slik at S er et høypassfilter. Når vi anvender $S \otimes I$ så anvender vi S på søylene (vi høypassfiltrerer hver søyle), slik at dette vil fremheve punkter der det skjer endringer i horisontal retning. På samme måte vil $I \otimes S$ fremheve endringer i vertikal retning, og $S \otimes S$ vil fremheve endringer som skjer både vertikalt og horisontalt.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 5 Wavelets

Anta at vi har vektoren

$$\boldsymbol{x} = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \dots)$$

med lengde $2^{10} = 1024$. Hva blir resultatet hvis du kjører en DWT med Haar-waveleten over 10 nivåer ("m-level DWT") på $\boldsymbol{x}$?
Hint: komponentene i $\boldsymbol{x}$ er koordinater til en funksjon $f \in V_{10}$ i basisen $\boldsymbol{\phi}_{10}$ (ϕ er skaleringsfunksjonen vi har definert for Haar-waveleten). Vis at $f \in W_8$ (fra dette vil du kunne regne ut koordinatene ganske greit. De siste to års eksamensoppgaver har en oppgave av tilsvarende typen).
Løsningsforslag: Etter første nivå gir DWT koordinatene $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \dots)$ i $\boldsymbol{\phi}_9$, og koordinatene $(0, 0, 0, 0, \dots)$ i $\boldsymbol{\psi}_9$. Andre nivå av DWT gir dermed koordinatene $(0, 0, 0, 0, \dots)$ i $\boldsymbol{\phi}_8$, og koordinatene $(2, 2, 2, 2, \dots)$ i $\boldsymbol{\psi}_8$. De neste nivåene i DWT opererer på $\boldsymbol{\phi}_8$, og kan derfor ikke gi flere koordinater som er $\neq 0$. Koordinatene i $\boldsymbol{\psi}_8$ er den andre fjerdedelen av koordinater i

$$(\boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_3, \boldsymbol{\psi}_4, \boldsymbol{\psi}_5, \boldsymbol{\psi}_6, \boldsymbol{\psi}_7, \boldsymbol{\psi}_8, \boldsymbol{\psi}_9),$$

som er basisen vi ender opp i etter en DWT ovr 10 nivåer. DWT over 10 nivåer gir derfor vektoren med $x_{256} = x_{257} = \cdots = x_{511} = 2$, og alle andre $x_n = 0$.

Oppgave 6 Konveksitet (vanskeligere enn det dere vil få på eksamen!)

Anta at $f(x)$ og $g(x)$ er konvekse funksjoner definert på $\mathbb{R}$ som også er positive, og voksende. Vi skal gjennom et par steg vise at da er $f(x)g(x)$ også konveks.

6a

Vis at

$$\begin{aligned}&\lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)g(\lambda x + (1-\lambda)y)\\ &\geq \lambda(1-\lambda)(f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x))\end{aligned}$$

Løsningsforslag: Siden f og g er begge konvekse og positive, så har vi at

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)g(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq (\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)).$$

Dermed får vi at

$$\begin{aligned}&\lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)g(\lambda x + (1-\lambda)y)\\ &\geq \lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y) - (\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y))\\ &= \lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y) - \lambda^2 f(x)g(x) - (1-\lambda)^2 f(y)g(y) - \lambda(1-\lambda)(f(x)g(y) + f(y)g(x)))\\ &= \lambda(1-\lambda)f(x)g(x) + \lambda(1-\lambda)f(y)g(y) - \lambda(1-\lambda)(f(x)g(y) + f(y)g(x)))\\ &= \lambda(1-\lambda)(f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)).\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 6.)

6b

Forklar hvorfor det fra a. følger at $f(x)g(x)$ er konveks (hint: start med å skrive $f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)$ som et produkt).
Løsningsforslag: Høyresiden over kan skrives $\lambda(1-\lambda)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$. Anta $\lambda \in [0,1]$. Det er nå vi bruker at f og g begge er voksende:

- Hvis $x < y$ så er både $f(x) - f(y) \leq 0$ og $g(x) - g(y) \leq 0$, og da er $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$.
- Hvis $x > y$ så er både $f(x) - f(y) \geq 0$ og $g(x) - g(y) \geq 0$, og da er $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$.

Vi har dermed vist at

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&\geq \lambda(1-\lambda)(f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)) \geq 0
\end{aligned}$$

Det følger nå at

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y)g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y)$$

for alle $\lambda \in [0,1]$, slik at $f(x)g(x)$ er en konveks funksjon.

Oppgave 7 Ikkelineær optimering

Vi vil finne minimum for funksjonen

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

under betingelsene $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$. Formuler KKT-betingelsene for dette problemet, og finn minimum ved å løse disse.
Løsningsforslag: Betingelsene kan skrives

$$\begin{aligned}
h_1(x, y, z) &= x + y + z - 1 = 0 \\
g_1(x, y, z) &= -x \leq 0 \\
g_2(x, y, z) &= -y \leq 0 \\
g_3(x, y, z) &= -z \leq 0
\end{aligned}$$

Gradientene blir

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix} \quad \nabla h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

KKT-betingelsene blir dermed

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

samt tilleggsbetingelsen $x + y + z = 1$. På komponentform kan disse skrives

$$\begin{aligned}
2x + \lambda &= \mu_1 \\
4y + \lambda &= \mu_2 \\
6z + \lambda &= \mu_3 \\
x + y + z &= 1.
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 7.)

Her skal også $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$, og $\mu_i =$ hvis den tilhørende ulikheten ikke er aktiv. La oss løse disse likningene ved å gå gjennom de forskjellige mulighetene for aktive ulikheter.

Ingen aktive ulikheter. Ulikhetene koker da ned til at $2x = 4y = 6z = -\lambda$, slik at $y = x/2$, $z = x/3$. Siden $x + y + z = 1$ får vi at

$$1 = x + y + z = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{11}{6}x,$$

slik at $x = 6/11$. Kandidaten blir dermed $(6/11, 3/11, 2/11)$, med tilhørende verdi $f(6/11, 3/11, 2/11) = 6/11$.

En eller to aktive ulikheter. I begge disse tilfellene finnes det minst en aktiv ulikhet, og en ikke-aktiv ulikhet. Fra den ikke-aktive ulikheten følger det at $\lambda < 0$. Hvis feks den første ulikheten er aktiv får vi da at $\lambda = \mu_1$, slik at $\mu_1 < 0$, som er en motsigelse i et minimum. Argumentet er tilsvarende hvis det er av de andre ulikhetene som er aktive.

Hvis alle ulikheter er aktive har vi punktet $(0, 0, 0)$, som ikke oppfyller betingelsen h_1.

Til slutt må vi sjekke om det er noen irregulære punkter. Eneste lineære avhengighet vi kan få til mellom gradientene er ved å uttrykke ∇h_1 ved hjelp av ∇g_1, ∇g_2, ∇g_3. Men da må alle tre ulikhetene være aktive, som er i strid med $x + y + z = 1$.

I dette tilfellet er det klart at vi minimerer over et lukket og begrenset område, slik at det er klart at det må finnes et minimum. Siden vi fant bare en kandidat for minimum, så er det klart at minimum er $f(6/11, 3/11, 2/11) = 6/11$.

SLUTT