UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF2360 — Anvendelser av lineær algebra
Eksamensdag:	Tirsdag 11. juni 2013
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenssettet inneholder 12 deloppgaver, og alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1 Fourierrekker

Regn ut den komplekse Fourierrekka til funksjonen $f(t) = \sin^2(2\pi t/T)$.

Oppgave 2 Filtre

Et filter S_1 er definert ved likningen

$$z_n = \frac{1}{16}(x_{n+2} + 4x_{n+1} + 6x_n + 4x_{n-1} + x_{n-2}).$$

2a

Hva blir den kompakte filternotasjonen for filteret? Skriv også opp en 8×8 sirkulant Toeplitz matrise som svarer til å anvende S_1 på et periodisk signal med lengde $N = 8$.

2b

Regn ut og plott (den kontinuerlige) frekvensresponsen til filteret. Er filteret et lavpassfilter eller et høypassfilter?

2c

Et annet filter S_2 har (kontinuerlig) frekvensrespons $\lambda_{S_2}(\omega) = (e^{i\omega} + 2 + e^{-i\omega})/4$. Skriv opp den kompakte filternotasjonen for det sammensatte filteret $S_1 S_2$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 Wavelets

I denne oppgaven skal vi la $\phi(t)$ være skaleringsfunksjonen vi brukte til å definere Haar-waveleten, det vil si funksjonen definert på $[0, N)$ som er 1 på $[0, 1)$, og 0 ellers. Vi minner om basisen $\boldsymbol{\phi}_m = \{\phi_{m,0}, \phi_{m,1}, \ldots, \phi_{m,2^m N-1}\}$ for rommet V_m, der $\phi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\phi(2^m t - n)$. Vi minner også om at funksjonen ψ er definert på $[0, N)$ ved å være 1 på $[0, 1/2)$, -1 på $[1/2, 1)$, og 0 ellers. Vi har også basisen $\boldsymbol{\psi}_m = \{\psi_{m,0}, \psi_{m,1}, \ldots, \psi_{m,2^m N-1}\}$ for rommet W_m, der $\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)$. For funksjoner vi ser på bruker vi indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_0^N f(t)g(t)\, dt.$$

3a

Anta at $f \in V_1$, det vil si at f er konstant på alle intervaller på formen $[n/2, (n+1)/2)$. Vis at $\langle f, \phi_{0,n} \rangle = (f(n) + f(n+1/2))/2$. Forklar fra dette hvorfor $\text{proj}_{V_0} f$ er den stykkevis konstante funksjonen som er lik $(f(n) + f(n+1/2))/2$ på $[n, n+1)$.

3b

Anta at vi har vektoren $\boldsymbol{x}$ med lengde $2^{10} = 1024$ definert ved $x_n = 1$ for n partall, $x_n = -1$ for n oddetall. Hva blir resultatet hvis du kjører en DWT med Haar-waveleten over 10 nivåer ("m-level DWT") på $\boldsymbol{x}$?
HINT: Vi definerte ψ ved at $\psi(t) = (\phi_{1,0}(t) - \phi_{1,1}(t))/\sqrt{2}$. Fra denne sammenhengen følger det og at $\psi_{9,n} = (\phi_{10,2n} - \phi_{10,2n+1})/\sqrt{2}$, og dermed at $\phi_{10,2n} - \phi_{10,2n+1} = \sqrt{2}\psi_{9,n}$. Prøv å koble denne identiteten mot det alternerende fortegnet du ser i elementene i $\boldsymbol{x}$.

Oppgave 4 Bilder

Anta at vi har et bilde gitt ved $N \times N$-matrisen `X`. Vi skal se på følgende Matlab-kode:

```
for k=1:2
  for s=1:N
    X(1,s)=0.25*X(N,s)+0.5*X(1,s)+0.25*X(2,s);
    X(2:(N-1),s)=0.25*X(1:(N-2),s)+0.5*X(2:(N-1),s)+0.25*X(3:N,s);
    X(N,s)=0.25*X(N-1,s)+0.5*X(N,s)+0.25*X(1,s);
  end
  X=X';
end
```

Hvilket tensorprodukt er det som blir anvendt på bildet? Kommenter hva koden gjør, spesielt første og tredje linje i den innerste `for`-løkken. Hvilken effekt har koden på bildet?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5 DFT

I denne oppgaven går, som i kompendiet, indeksene i en vektor fra 0 til $N-1$, der N er lengden til vektoren. Vi betegner $N \times N$-Fouriermatrisen med F_N. Husk også at vi skriver en søylevektor som $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$.

5a

Anta at vektoren $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ med lengde $N = 8$ er slik at $F_8(\boldsymbol{x}) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$. Hvis $\boldsymbol{z}$ er vektoren med komponenter $z_k = e^{2\pi i 2k/8} x_k$, hva blir da $F_8(\boldsymbol{z})$? Begrunn svaret.

5b

La $\boldsymbol{x}$ være vektoren av lengde N der $x_k = \cos^2(2\pi k/N)$. Hva blir da $F_N(\boldsymbol{x})$? Begrunn svaret.

Oppgave 6 Konveksitet

La f være en konveks funksjon definert på $C \subset \mathbb{R}^n$. Vis at funksjonen $g(\boldsymbol{x}) = e^{f(\boldsymbol{x})}$ også er konveks.
HINT: Du skal her kunne bruke definisjonen av konveksitet direkte. Hvis du ikke klarer dette: du scorer også litt poeng hvis du klarer oppgaven under tilleggsantagelsen at f er to ganger deriverbar (evt. også at $n = 1$) (deriver to ganger, se på fortegnet til den andrederiverte).

Oppgave 7 Ikkelineær optimering

Vi skal se på problemet der vi skal finne minimum til funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ under betingelsene $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$.

7a

Skriv opp KKT-betingelsense for dette problemet (spesielt må du definere betingelsesfunksjoner h_1, g_1, g_2, g_3), og finn minimum ved å sammenligne kandidater du får fra forskjellige kombinasjoner av aktive ulikheter.

7b

Formuler barrierfunksjonen og barrierproblemet for dette optimeringsproblemet, og skisser hvordan du kan løse dette numerisk ved hjelp av Newtons metode (du skal ikke regne ut selve løsningen, men kun si litt om hvordan Newtons metode kan tilpasses barrierproblemet, som her er et optimeringsproblem med en likhetsbetingelse).

SLUTT