UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF2360 — Anvendelser av lineær algebra
Eksamensdag:	Torsdag 8. juni 2017
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenssettet inneholder 10 deloppgaver, og alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1 Fourierrekker

Vi lar f være funksjonen med periode T definert ved

$$f(t) = \cos(6\pi t/T)\sin(4\pi t/T).$$

Skriv opp den komplekse Fourierrekka av orden N til f (d.v.s. $f_N(t)$). Hva blir spesielt $f_4(t)$ og $f_6(t)$?

Oppgave 2 DFT

Hva blir Diskret Fourier Transform av vektoren av vektoren

$$\boldsymbol{x} = (i^3, i^4, i^5 \ldots, , i^{N-1}, 1, i, i^2),$$

d.v.s. $\mathrm{DFT}_N\boldsymbol{x}$? Du kan anta at N er delelig med 4.

Oppgave 3 Filtre

La S være filteret med kompakt filternotasjon

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \underline{\frac{3}{4}}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right\}.$$

3a

Skriv ned en 8×8 sirkulant Toeplitz matrise som svarer til å anvende S på vektorer som er periodiske med periode 8. Regn også ut og plott (den kontinuerlige) frekvensresponsen. Er filteret et lavpass- eller høypassfilter?

(Fortsettes på side 2.)

3b

Regn ut $S\boldsymbol{x}$, der $\boldsymbol{x}$ er vektoren fra oppgave 2.

Oppgave 4 Tensorprodukter og wavelets

4a

Forklar algoritmen for å regne ut en DWT med Haar-waveleten, og regn ut DWT over 10 nivåer for vektoren $(1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, ..., 1, 2, 3, 4)$ av lengde 1024 (d.v.s. $(1, 2, 3, 4)$ blir repetert 256 ganger).

4b

Vi definerer 1024×1024-matrisen X ved

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 255 & 255 & \cdots & 0 & 0 & 255 & 255 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & \cdots & 0 & 0 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 0 & 0 & \cdots & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 255 & 255 & 0 & 0 & \cdots & 255 & 255 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 255 & 255 & \cdots & 0 & 0 & 255 & 255 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & \cdots & 0 & 0 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 0 & 0 & \cdots & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 255 & 255 & 0 & 0 & \cdots & 255 & 255 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

det vil si bildet der matrisene $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 255 & 255 \\ 255 & 255 \end{pmatrix}$ kommer i alternerende rekkefølge i begge retninger. Vi definer også filtrene $S_1 = \{1, \underline{-1}\}$ og $S_2 = \{\underline{1}, 1\}$. Regn ut $(S_1 \otimes S_2)X$. $S_1 \otimes S_2$ er her tensorproduktet av de to lineære transformasjonene S_1 og S_2.

4c

Vi skal se på følgende Matlab-kode

```
X = DWT2Impl(X,1,'Haar');
X = mapto01(X);
X=255*X;
imshow(uint8(X))
```

(I python er koden så å si lik). Her er X er matrisen fra b). Forklar algoritmen for å regne ut en 2-dimensjonal DWT med Haar-waveleten, og beskriv de fire hjørnene i bildet som blir vist etter at du har kjørt koden over.

Oppgave 5 Konveksitet

En funksjon f definert på en konveks mengde $C \subset \mathbb{R}^n$ sies å være strengt konveks hvis vi har streng ulikhet i ulikheten som definerer konveksitet, d.v.s.

$$f((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}) < (1-\lambda)f(\boldsymbol{x}) + \lambda f(\boldsymbol{y})$$

når $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ og $0 < \lambda < 1$.

(Fortsettes på side 3.)

Anta at g er en konveks funksjon, og at $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$. Vis at funksjonen $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|^2$ er strengt konveks funksjon.
Du vil også få en del poeng hvis du klarer å vise at f er konveks, men du må vise at f er strengt konveks for å få full score.
Hint: Du kan bruke at den reelle funksjonen $s(x) = x^2$ er strengt konveks (du trenger ikke bevise dette).

Oppgave 6 Ikkelineær optimering

6a

Finn minimum for funksjonen

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

under betingelsene $x + y = 1$, $x - y = 0$,$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Du skal bruke Lagranges metode/sette opp KKT-betingelsene.

6b

Formuler barrierproblemet med parameter μ for problemet fra a). Spesielt skal du skrive ned barrierfunksjonen ϕ, en matrise A, og en vektor $\boldsymbol{b}$ slik at likhetsbetingelsene tar formen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Forklar også hvordan man kan løse barrierproblemet numerisk, og hvordan man kan bruke barrierproblemet til å løse problemet fra a) numerisk.

SLUTT