UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT-INF2360 — Anvendelser av lineær algebra, prøveeks.

Eksamensdag: Mandag 21. mai 2012

Tid for eksamen: 09.00 – 24.00

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Fourieranalyse

1a (vekt 10%)

Regn ut DFT av vektorene $\boldsymbol{x}_1 = (1, 3, 5, 7)$, og av $\boldsymbol{x}_2 = (2, 4, 6, 8)$ (du skal altså regne ut $F_4\boldsymbol{x}_1$ og $F_4\boldsymbol{x}_2$).

1b (vekt 10%)

Forklar hvordan du kan regne ut DFT av vektoren $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ basert på utregningene fra b. (du trenger ikke gjøre selve utregningen). Hva er fordelene med denne fremgangsmåten, og hva kalles algoritmen?

Oppgave 2 Fourieranalyse

I denne oppgaven antar vi at alle funksjoner er periodiske med periode T. Du får bruk for at vi i Fourieranalysedelen av kurset definerte indreproduktet for slike funksjoner ved $\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$.

2a (vekt 10%)

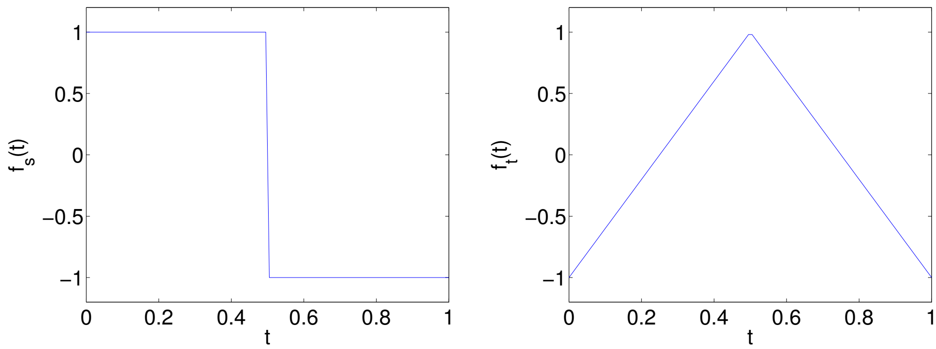
Anta f er kontinerlig deriverbar. Bruk delvis integrasjon til å vise at

$$\langle f, e^{2\pi int/T}\rangle = \frac{T}{2\pi in}\langle f'(t), e^{2\pi int/T}\rangle,$$

og forklar hvorfor det følger fra dette at $(f_N)'(t) = (f')_N(t)$, der f_N er N'te ordens Fourierrekka til f, og $(f')_N$ er N'te ordens Fourierrekka til f'. Med andre ord, den deriverte av Fourierrekka er lik Fourierrekka til den deriverte.

Nedenfor finner du plott av firkantpulsen ($f_s(t)$) og trekantpulsen ($f_t(t)$) over en periode, slik vi har definert dem i kurset (vi har satt $T = 1$):

(Fortsettes på side 2.)



2b (vekt 10%)

Forklar fra figuren hvorfor $f_t'(t) = \frac{4}{T} f_s(t)$, bortsett fra i de to punktene der f_t ikke er deriverbar.

2c (vekt 10%)

I kompendiet regnet vi ut at Fourierrekka til firkantpulsen kunne skrives

$$(f_s)_N(t) = \frac{4}{\pi} \sin(2\pi t/T) + \frac{4}{3\pi} \sin(2\pi 3t/T) + \frac{4}{5\pi} \sin(2\pi 5t/T) + \cdots .$$

Fra b. følger det nå at

$$((f_t)')_N(t) = \frac{4}{T} \left(\frac{4}{\pi} \sin(2\pi t/T) + \frac{4}{3\pi} \sin(2\pi 3t/T) + \frac{4}{5\pi} \sin(2\pi 5t/T) + \cdots \right)$$

Bruk dette og resultatet fra a. til å regne ut $(f_t)_N$ (Fourierrekka til trekantpulsen). Dette verifiserer et eksempel fra kompendiet, der vi fant denne Fourierrekka ved direkte utregning. Du kan ta for gitt at du kan bruke resultatet fra a. selv om det finnes to punkter der f_t ikke er kontinuerlig deriverbar.

Oppgave 3 Filtre

Vi skal i denne oppgaven se på filteret $T = \frac{1}{6}\{1, 4, \underline{6}, 4, 1\}$.

3a (vekt 10%)

Skriv opp en 8×8 sirkulant Toeplitz matrise som svarer til å anvende dette filteret på en vektor av lengde 8.

3b (vekt 10%)

Regn ut og plott (den kontinuerlige) frekvensresponsen til T. Er filteret et lavpass- eller høypassfilter?

3c (vekt 10%)

La oss definere vektoren

$$\boldsymbol{x} = (\cos(2\pi 5 \cdot 0/N), \cos(2\pi 5 \cdot 1/N), \ldots, \cos(2\pi 5 \cdot (N-1)/N)) ,$$

der N er lengde til vektoren. Regn ut $T\boldsymbol{x}$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4 Bilder og tensorprodukter

La filteret T være gitt ved $T = \{1, \underline{2}, 1\}$.

4a (vekt 10%)

I kompendiet definerte vi $T \otimes T$ som en operasjon på et bilde, og forklarte at $T \otimes T$ anvendt på et bildet X kan regnes ut ved hjelp av et såkalt "computational molecule". Skriv opp det tilhørende computational molecule for $T \otimes T$.

4b (vekt 10%)

La oss definere $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{y} = (3, 2, 1)$, $\boldsymbol{z} = (2, 2, 2)$, og $\boldsymbol{w} = (1, 4, 2)$. Regn ut matrisen $A = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \otimes \boldsymbol{w}$, slik vi har definert tensorproduktet av vektorer i kompendiet.

4c (vekt 10%)

Forklar hvordan vi kan regne ut $(T \otimes T)A$ ved å anvende filteret T på hver rad og søyle i matrisen, og gjennomfør utregningen. Hvis matrisen A mer generelt var et bilde, hva kan du si om hvordan det nye bildet blir seende ut?

Oppgave 5 Wavelets

I denne oppgaven skal vi la $\phi(t)$ være funksjonen vi brukte da vi definerte Haar-waveleten, det vil si funksjonen som er 1 på $[0, 1]$, og 0 ellers. La funksjonen f være definert på $[0, N)$ ved at $f(t) = t$. Vi minner også om at funksjonen ψ er definert på $[0, N)$ ved å være 1 på $[0, 1/2)$, -1 på $[1/2, 1)$, og 0 ellers, og at indreproduktet vi bruker er definert ved $\langle f, g \rangle = \int_0^N f(t)\overline{g(t)}dt$.

5a (vekt 10%)

I kompendiet definerte vi funksjonen $\psi_{m,n}$ ved $\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)$. Vis at $\psi_{m,n}$ er ortonormale.

5b (vekt 10%)

Regn ut $w_{m,n} = \langle f, \psi_{m,n} \rangle$ (vi kalte disse for waveletkoeffisienter). Her var $\psi_{m,n} = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)$.

5c (vekt 10%)

Regn ut projeksjonen av f ned på underrommet W_0 utspent av funksjonene $\{\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \ldots, \psi_{0,N-1}\}$

Oppgave 6 Wavelets

Anta at vi kjører følgende algoritme på lyden representert ved vektoren `S`:

(Fortsettes på side 4.)

```
l=length(S);
c=(S(1:2:(l-1))+S(1:l))/sqrt(2);
w=(S(1:2:(l-1))-S(1:l))/sqrt(2);

newS=[c w];
newS=newS/max(abs(newS));
playerobj=audioplayer(newS,44100);
playblocking(playerobj)
```

6a (vekt 10%)

Kommenter koden og forklar hva som skjer. Hvilken wavelet er det som blir brukt? Hva representerer vektorene `c` og `w`? Beskriv lyden du vil høre.

6b (vekt 10%)

Anta at vi legger til noen linjer i koden over som nullstiller elementene i vektoren `w` før vi regner oss tilbake ved å kjøre en invers wavelet transform. Hva vil du høre hvis du spiller av den nye lyden du da får?

Oppgave 7 Konveksitet

7a (vekt 10%)

Forklar hva det vil si at f er en konveks funksjon, og vis at $\max\{f, g\}$ er en konveks funksjon når f og g er det (vi definerer $\max\{f, g\}$ ved at $\max\{f, g\}(\boldsymbol{x}) = \max(f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})))$

7b (vekt 10%)

Anta f, g er konvekse, positive, og voksende funksjoner, begge to ganger deriverbare og definert på $\mathbb{R}$. Vis at $h(x) = f(x)g(x)$ er konveks.
Hint: Se på den andrederiverte til $h(x)$.

Oppgave 8 Ikkelineær optimering

I denne oppgaven skal vi finne minimum for funksjonen $f(x) = 3x+2y$ under betingelsene $x + y = 1$ og $x, y \geq 0$.

8a (vekt 10%)

Finn en matrise A og en vektor $\boldsymbol{b}$ slik at betingelsen $x + y = 1$ kan skrives på formen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

8b (vekt 10%)

Formuler KKT-betingelsene for dette problemet, og finn minimum ved å løse disse.

(Fortsettes på side 5.)

8c (vekt 10%)

Skriv opp barrierfunksjonen $\phi(x) = -\ln(-g_1(xy)) - \ln(-g_2(x, y))$ for dette optimeringsproblemet, der g_1 og g_2 representerer de to bibetingelsene i problemet. Regn også ut $\nabla\phi$.

8d (vekt 10%)

Løs barrierproblemet med parameter μ, og kall løsningen for $\boldsymbol{x}(\mu)$. Blir $\lim_{\mu\to 0} \boldsymbol{x}(\mu)$ løsningen du fant i b.?

Oppgave 9 Ikkelineær optimering

[10%] Vi skal se på følgende optimeringsproblem.

$$\min\{x_1 : x_2 \geq 0, 1 - (x_1 - 1)^2 - x_2^2 \geq 0\}.$$

Skriv opp KKT betingelsene for dette problemet, og finn minimum.

SLUTT