6. mars, 2013

MAT-INF 2360: Obligatorisk oppgave 2

Innleveringsfrist: 4/4-2013, kl. 14:30

Informasjon

Den skriftlige besvarelsen skal leveres i obligkassa som står i gangen utenfor ekspedisjonen i 7. et. i Niels Henrik Abels hus senest *kl. 14.30 torsdag 4/4*. Du kan også levere via devilry. Besvarelsen *skal* være skrevet av deg selv, for hånd eller på datamaskin.

Studenter som blir syke eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse for denne obligatoriske oppgaven, må ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (7. et. Niels Henrik Abels hus, telefon 22 8558 88, e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

Det oppfordres til samarbeid underveis i arbeidet med oppgavene, og gruppelærer og forelesere har anledning til å svare på generelle spørsmål, men kan ikke servere ferdige løsninger. *Den endelige besvarelsen som du leverer skal utarbeides av deg selv, og du må kunne redegjøre for innholdet ved en eventuell muntlig høring (aktuelt ved mistanke om avskrift).*

Husk at de tre obligatoriske oppgavene i MAT-INF 2360 alle må bestås for å kunne gå opp til endelig eksamen i kurset. *For å få bestått på denne andre obligatoriske oppgaven må du gjøre seriøse løsningsforsøk på alle oppgavene unntatt Oppgave 7 (siden denne anses som vanskeligere), og minst 6 av de 8 deloppgavene bør være riktig besvart.*

La $\phi^{(1)}$ være skaleringsfunksjonen som brukes for stykkekvis lineære funksjoner (Likning (6.1) i kompendiet) Vi skal se på funksjonen

$$\phi^{(3)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(1)}(x)\phi^{(1)}(t-x)dx. \tag{1}$$

Innen matematikk kalles dette for konvolusjon av to funksjoner og man skriver $\phi^{(3)} = \phi^{(1)} * \phi^{(1)}$, men vi skal ikke bruke dette begrepet. Det kan vises at

1. $\phi^{(3)}$ er 2 ganger deriverbar overalt,
2. $\phi^{(3)}$ er lik et tredjegradspolynom på hvert intervall $[n, n+1]$,
3. $\phi^{(3)}$ er 0 utenfor $(-2, 2)$,
4. funksjonene $\{\phi^{(3)}(t-n)\}_{n=0}^{N-1}$ er lineært uavhengige.

Du kan ta disse tingene for gitt, og også at for enhver funksjon f finnes det et unikt tredjegradspolynom som oppfyller 1. og 2., og som har samme funksjonsverdier som f.

1. Funksjonen $\phi^{(3)}$ kan brukes som skaleringsfunksjon for en multiresolusjonsanalyse (MRA). Beskriv denne multiresolusjonsanalysen ved å skrive opp uttrykk for rommene V_m. Tror du denne MRA'en er bedre eller dårligere med tanke på approksimasjon av funksjoner, sammenlignet med MRA'ene der vi brukte stykkevis lineære- og stykkevis konstante funksjoner?

Som før definerer vi $(\phi^{(3)})_{m,n}(t) = 2^{m/2}\phi^{(3)}(2^m t - n)$. Fra kompendiet (Likning (6.19) s. 198) hadde vi at

$$\phi^{(1)}(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\phi^{(1)})_{1,-1}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^{(1)})_{1,0}(t) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\phi^{(1)})_{1,1}(t).$$

Setter vi dette inn i integranden i Likning 1 kan man utlede sammenhengen (men du skal ikke utlede den selv!)

$$\phi^{(3)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{8}(\phi^{(3)})_{1,-2}(t) + \frac{1}{2}(\phi^{(3)})_{1,-1}(t) + \frac{3}{4}(\phi^{(3)})_{1,0}(t) + \frac{1}{2}(\phi^{(3)})_{1,1}(t) + \frac{1}{8}(\phi^{(3)})_{1,2}(t)\right) \tag{2}$$

Vi definerer i tillegg

$$\psi^{(3)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^{(3)}_{1,1}(t), \tag{3}$$

helt tilsvarende som vi definerte ψ for stykkevis lineære funksjoner i Lemma 6.9 på side 190. Som før definerer vi også $\boldsymbol{\phi}_m$ som rommet uspent av alle $\{(\phi^{(3)})_{m,n}\}_n$, og $\boldsymbol{\psi}_m$ som rommet utspent av alle $\{(\psi^{(3)})_{m,n}\}_n$.

2. Skriv opp koordinatskiftematrisen $P_{\boldsymbol{\phi}_1 \leftarrow \mathscr{C}_1}$ for $N = 8$ for vår nye MRA, ved å bruke likningene (2) og (3) ($\mathscr{C}_1$ er definert i Kapittel 7 i kompendiet). Ut fra denne skriv også opp filtrene G_0, G_1 (slik de er definert i Definisjon 7.4 s. 208), ved hjelp av kompakt filternotasjon.
Hint: $P_{\boldsymbol{\phi}_1 \leftarrow \mathscr{C}_1}$ skal bli en 16×16 MRA-matrise. Prøv å kopiere hvordan vi i kompendiet setter opp Likning (7.3), (7.4), og (7.5), fra uttrykk på tilsvarende form som (2) og (3).

Problemet med $\psi^{(3)}$ slik vi definerte den er at den ikke har noen forsvinnende momenter, slik dette er definert i Teorem 6.19, s. 197 i kompendiet.

3. La oss definere

$$\hat{\psi} = \psi^{(3)} - \alpha\phi^{(3)}_{0,0} - \beta\phi^{(3)}_{0,1} - \gamma\phi^{(3)}_{0,-1} - \delta\phi^{(3)}_{0,2}, \tag{4}$$

og forsøke å finne $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ slik at $\hat{\psi}$ har fire forsvinnende momenter. Definer

$$a_k = \int_0^N t^k \phi^{(3)}_{0,0} dt \qquad b_k = \int_0^N t^k \phi^{(3)}_{0,1} dt \quad g_k = \int_0^N t^k \phi^{(3)}_{0,-1} dt \quad d_k = \int_0^N t^k \phi^{(3)}_{0,2} dt$$
$$e_k = \int_0^N t^k \psi^{(3)}(t) dt.$$

Forklar at hvis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ løser likningen

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & g_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & g_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & g_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & g_3 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

så vil $\hat{\psi}$ ha fire forsvinnende momenter.
4. Vi kjører en IDWT ved hjelp av på filtrene G_0, G_1 fra Oppgave 2, på vektoren

$$(-\alpha, -\beta, -\delta, 0 \ldots, 0, -\gamma) \oplus (1, 0, \ldots, 0)$$

(der det totalt er listet opp $2N$ elementer). Da får du en koordinatvektor for en funksjon i basisen $\boldsymbol{\phi}_1$. Hvilken funksjon er det du får koordinatvektoren til? Du skal ikke regne ut noe her!

Det er klart at integralet fra Likning (1) kan regnes ut eksakt, og at integralene a_k, b_k, g_k, d_k, e_k dermed også kan regnes ut eksakt. Dermed kan også $\hat{\psi}$ regnes ut eksakt. Gjør vi dette kan vi finne at MRA'en som bruker $\phi^{(3)}$ som skaleringsfunksjon og $\hat{\psi}$ som moderwavelet, har filtre som kan skrives

$$
\begin{aligned}
G_0 &= \frac{1}{16}\{1,4,\underline{6},4,1\} \\
G_1 &= \frac{1}{128}\{5,20,1,-96,-70,\underline{280},-70,-96,1,20,5\} \\
H_0 &= \frac{1}{128}\{-5,20,-1,-96,70,\underline{280},70,-96,-1,20,-5\} \\
H_1 &= \frac{1}{16}\{1,-4,\underline{6},-4,1\} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Du skal slippe å utlede disse uttrykkene! Her har vi i tillegg skalert filtrene slik at $\sqrt{2}$ (som var med i uttrykkene i Oppgave 2) ikke er med lenger.

5. Det viser seg at filtrene over kan brukes i forbindelse med tapsfri kompresjon av lyd og bilder. Prøv å forklare dette ut fra uttrykkene over for filterkoeffisientene.

6. Plott frekvensresponsene til filtrene G_0 og G_1 i Likning 6, og karakteriser filtrene som lavpass- eller høypass-filtre. Hvordan stemmer dette med de andre filtrene i kompendiet?

7 (Vanskelig). Kjør følgende kode, der funksjonen `IDWTImpl` beskrevet i Seksjon 7.4 blir kjørt:

```
s=1;
phipart=[0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0];
psipart=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
phipart=IDWTImpl(g0,g1,[phipart; psipart],1);
for k=1:s
  phipart=IDWTImpl(g0,g1,[phipart; zeros(8*2^k,1)],1);
end
subplot(1,2,1);
plot(linspace(-4,4,8*2^(s+1)),phipart);

phipart=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
psipart=[0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0];
phipart=IDWTImpl(g0,g1,[phipart; psipart],1);
for k=1:s
  phipart=IDWTImpl(g0,g1,[phipart; zeros(8*2^k,1)],1);
end
subplot(1,2,2);
plot(linspace(-4.5,3.5,8*2^(s+1)),phipart);
```

Det ser ut som plottene konvergerer når s øker. Hva er det som vises? Du trenger ikke kommentere all linjene i koden, det er nok at du kommer med en kvalifisert gjetning på hva som blir vist.
Hint: Du trenger å vite at hvis $f \in V_0$, og du gjør et koordinatskifte til $\boldsymbol{\phi}_m$ ved hjempe av IDWT, så vil et plott av de nye koordinatene til f vise en fasong som ligner mer og mer på fasongen til f når m øker. Hvorfor legger jeg til nuller inne i for-løkka?

8 (Eksperimenter på lyd). I oppgave 3 og 4 i Seksjon 7.4 implementerte du to Matlab-funksjoner, `playDWTfilterslower` og `playDWTfilterslowerdifference`, som gjorde at du kunne høre på approksimasjoner av lydfila `castanets.wav` fra forskjellige V_m, samt detaljdelen (delen fra $W_0 \oplus \cdots \oplus W_{m-1}$). Skriv kode som kaller disse funksjonene der m løper fra 1 til 4, og der filterne fra Likning 6 blir brukt. Sammenlign det du hører med det du hørte når du spilte av med Haar-waveleten i stedet.