UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT-INF2360 — Anvendelser av lineær algebra

Eksamensdag: Torsdag 11. juni 2015

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 8 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenssettet inneholder 12 deloppgaver, og alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1 Fourierrekker

Vi lar f være en periodisk funksjon med periode T, definert på $[0,T)$ ved at $f(t) = \cos(6\pi t/T + \pi/2)$ Skriv opp den komplekse Fourierrekka av orden $N = 2$ og $N = 3$ til f (d.v.s. $f_2(t)$ og $f_3(t)$). Forklar også hvorfor $f_N(t) = f_3(t)$ for alle $N > 3$.

Løsningsforslag: Det er her ikke nødvendig å regne ut Fourierintegralene $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2\pi int/T}dt$ (selv om heller ikke dette gir mye regning), siden

$$
\begin{aligned}
\cos(6\pi t/T + \pi/2) &= -\sin(6\pi t/T) = -\frac{1}{2i}(e^{6\pi it/T} - e^{-6\pi it/T}) \\
&= -\frac{1}{2i}(e^{2\pi i3t/T} - e^{-2\pi i3t/T}).
\end{aligned}
$$

Dette betyr at $y_3 = -1/(2i) = i/2$, $y_{-3} = 1/(2i) = -i/2$, og at alle andre y_n er 0. Dette betyr spesielt at

$$
\begin{aligned}
f_2(t) &= \sum_{n=-2}^{2} y_n e^{2\pi int/T} = 0 \\
f_3(t) &= \sum_{n=-3}^{3} y_n e^{2\pi int/T} = \frac{i}{2}e^{2\pi i3t/T} - \frac{i}{2}e^{-2\pi i3t/T}.
\end{aligned}
$$

På samme måte følger at $f_N(t) = f_3(t)$ for alle $N > 3$, siden alle andre y_n er 0.

Oppgave 2 DFT

2a

La $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ være vektoren med komponenter

$$(\cos(2\pi 3(-3)/N), \cos(2\pi 3(-2)/N), \ldots, \cos(2\pi 3(N-4)/N)).$$

(Fortsettes på side 2.)

Regn ut $F_N\boldsymbol{x}$ (F_N var definert som koordinatskiftet fra standardbasisen i $\mathbb{R}^N$ til Fourierbasisen $\mathcal{F}_N$).
Løsningsforslag: La oss bruke notasjonen $\cos(2\pi 3(k-3)/N)$ for denne vektoren (k representerer indeks i vektoren). Vi har at

$$\begin{aligned}\cos(2\pi 3(k-3)/N) &= \frac{1}{2}\left(e^{2\pi 3i(k-3)/N} + e^{-2\pi 3i(k-3)/N}\right)\\ &= \frac{1}{2}e^{-2\pi 9i/N}e^{2\pi 3ik/N} + \frac{1}{2}e^{2\pi 9i/N}e^{-2\pi 3ik/N}\\ &= \frac{1}{2}e^{-2\pi 9i/N}e^{2\pi 3ik/N} + \frac{1}{2}e^{2\pi 9i/N}e^{2\pi(N-3)ik/N}\\ &= \frac{\sqrt{N}}{2}e^{-2\pi 9i/N}\phi_3 + \frac{\sqrt{N}}{2}e^{2\pi 9i/N}\phi_{N-3}.\end{aligned}$$

Siden $F_N(\phi_n) = \boldsymbol{e}_n$, så får vi at

$$F_N\left(\cos(2\pi 3(k-3)/N)\right) = \frac{\sqrt{N}}{2}e^{-2\pi 9i/N}\boldsymbol{e}_3 + \frac{\sqrt{N}}{2}e^{2\pi 9i/N}\boldsymbol{e}_{N-3}.$$

Her kan man eventuelt også bruke resultatet som sier at tidsforsinkelse av $\boldsymbol{x}$ svarer til å gange $F_N\boldsymbol{x}$ med et komplekst eksponential.

Oppgave 3 Filtre

Et filter S er definert ved hjelp av den sirkulante Toeplitz matrisen

$$\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 4\\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

3a

Skriv ned den kompakte filternotasjonen for S, og regn ut og plott (den kontinuerlige) frekvensresponsen. Er filteret et lavpass- eller høypassfilter?
Løsningsforslag: Kompakt filternotasjon for S blir $\frac{1}{16}\{1, 4, \underline{6}, 4, 1\}$. Frekvensresponsen blir

$$\lambda_S(\omega) = \frac{1}{16}(e^{2i\omega} + 4e^{i\omega} + 6 + 4e^{-i\omega} + e^{-2i\omega}) = \left(\frac{1}{2}(e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2})\right)^4 = \cos^4(\omega/2),$$

der vi kjente igjen verdiene fra Pascals trekant, og det er klart at dette er et lavpassfilter (evt. regn ut $\lambda_S(0) = 1$, $\lambda_S(\pi) = 0$).

3b

Skriv ned alle egenverdiene til S. Hva blir de tilhørende egenvektorene?
Løsningsforslag: Egenverdiene er

$$\lambda_{S,n} = \lambda_S(2\pi n/N) = \lambda_S(2\pi n/8) = \cos^4(\pi n/8).$$

(Fortsettes på side 3.)

Spersialt får vi at

$$\lambda_{S,0} = 1 \qquad \lambda_{S,2} = 1/4 \qquad \lambda_{S,4} = 0 \qquad \lambda_{S,6} = 1/4.$$

De resterende $\lambda_{S,n}$ har ikke fullt så pene uttrykk. Tilhørende egenvektor blir ϕ_0, ϕ_1,...,ϕ_7 (Fourierbasisen).

3c

Vi har et annet filter definert ved $S_2 = \frac{1}{4}\{1, \underline{2}, 1\}$. Skriv ned den kompakte filternotasjonen for det sammensatte filteret SS_2. Er SS_2 et lavpass- eller høypassfilter?

Løsningsforslag: Vi ser at $\lambda_{S_2}(\omega) = (\frac{1}{2}(e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2}))^2$ (siden vi igjen har verdier fra Pascals trekant). Vi får dermed at

$$\begin{aligned}\lambda_{SS_2}(\omega) &= \lambda_S(\omega)\lambda_{S_2}(\omega)\\ &= \left(\frac{1}{2}(e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2})\right)^4 \left(\frac{1}{2}(e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2})\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2})\right)^6\\ &= \frac{1}{64}(e^{3i\omega} + 6e^{2i\omega} + 15e^{i\omega} + 20 + 15e^{-i\omega} + 6e^{-2i\omega} + e^{-3i\omega}),\end{aligned}$$

der vi igjen brukte at vi kunne lese ut verdiene fra Pascals trekant. Dette betyr at SS_2 har kompakt filternotasjon $\frac{1}{64}\{1, 6, 15, \underline{20}, 15, 6, 1\}$.

Oppgave 4 Tensorprodukter

Vi definerer filtrene $S_1 = \{1, \underline{-1}\}$ og $S_2 = \{\underline{1}, 1\}$, og matrisen X ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Regn ut $(S_1 \otimes S_2)X$. $S_1 \otimes S_2$ er her tensorproduktet av de to lineære transformasjonene S_1 og S_2.

Løsningsforslag: Vi har lært at $(S_1 \otimes S_2)X = S_1X(S_2)^T$, slik at vi kan starte med å anvende S_1 på alle søylene i X. Filteret kan regnes ut ved at $z_n = x_{n+1} - x_n$. Siden raden nedenfor har verdi 1 større enn raden over (med unntak av siste rad, der verdiene skiller seg med 3), så får vi at

$$S_1X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Til slutt skal vi anvende filteret S_2 på radene i S_1X. Filteret S_2 svarer til at $z_n = x_n + x_{n-1}$, slik at vi skal legge samme naboverdiene på hver rad. Gjør vi det får vi at

$$S_1X(S_2)^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -6 & -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 5 Wavelets

I denne oppgaven skal vi la $\phi(t)$ være funksjonen definert på $[0, N)$ som vi brukte da vi definerte Haar-waveleten, det vil si funksjonen som er 1 på $[0, 1)$, og 0 ellers. Vi minner om basisen $\boldsymbol{\phi}_m = \{\phi_{m,0}, \phi_{m,1}, \ldots, \phi_{m,2^m N-1}\}$ for rommet V_m, der $\phi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\phi(2^m t - n)$. Vi minner også om at funksjonen ψ er definert på $[0, N)$ ved å være 1 på $[0, 1/2)$, -1 på $[1/2, 1)$, og 0 ellers. Vi har også basisen $\boldsymbol{\psi}_m = \{\psi_{m,0}, \psi_{m,1}, \ldots, \psi_{m,2^m N-1}\}$ for rommet W_m, der $\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)$. For funksjonen vi ser på bruker vi indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_0^N f(t)g(t)\,dt.$$

5a

Anta at $f(t) = a + ht$ (definert på $[0, N)$), der a og h er gitte tall. Regn ut $\text{proj}_{V_0}(f)$.

Løsningsforslag: Vi har at

$$\begin{aligned}
\langle f, \phi_{0,n} \rangle &= \int_0^N (a + ht)\phi_{0,n}(t)dt = \int_n^{n+1} (a + ht)dt = [at + ht^2/2]_n^{n+1} \\
&= a + h((n+1)^2 - n^2)/2 = a + h(2n+1)/2 = a + h(n + 1/2) \\
&= f(n + 1/2).
\end{aligned}$$

Hvis vi nå bruker ortogonalt dekomposisjonsteorem og at $\boldsymbol{\phi}_0$ er en ortonormal basis for V_0, så får vi at

$$\text{proj}_{V_0}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} \langle f, \phi_{0,n} \rangle \phi_{0,n} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n + 1/2)\phi_{0,n},$$

slik at $\text{proj}_{V_0}(f)$ er den stykkevis konstante funksjonen som er lik $f(n+1/2)$ på $[n, n+1]$.

5b

La $\boldsymbol{x}$ være vektoren

$$(a, a + h, a + 2h, \ldots, a + (N-1)h) \in \mathbb{R}^N,$$

det vil si at komponentene i $\boldsymbol{x}$ vokser lineært. Anta at du regner ut en DWT av $\boldsymbol{x}$ over ett nivå. Vis at da blir alle detaljkoordinatene ($w_{0,n}$ i kompendiet) like. Forklar også at denne felles verdien avhenger bare av h, og ikke av a.
Hint: Imiter det koden for en Haar-wavelet implementasjon gjør, slik den regner ut summer og differenser.

Løsningsforslag: Detaljkoordinatene regnes ut som $w_{0,n} = ((a + (2n)h) - (a + (2n + 1)h)/\sqrt{2} = -h/\sqrt{2}$. Dette viser at alle detaljkoordinatene er like, og er bare avhengig av h. Man kan også her argumentere med at Detaljkoordinatene regnes ut ved et filter H_1, som essensielt svarer til å derivere numerisk. Siden vektoren vokser lineært så vil vi da få en konstant verdi, som bare avhenger av stigningstallet h.

(Fortsettes på side 5.)

5c

I denne oppgaven skal vi først kjøre følgende kode (i Matlab)

```
x = linspace(0, 127.5, 256);
y = linspace(0, 127.5, 256);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z = X + Y;
```

Tilsvarende kode i Python blir

```
from numpy import *
from images import *
from dwt import *

x = linspace(0, 127.5, 256)
y = linspace(0, 127.5, 256)
X,Y = meshgrid(x, y)
Z = X + Y
```

Koden genererer et bilde, der alle pikselverdiene ligger mellom 0 og 255, og på en flate på formen $z = x + y$. Vi kjører så følgende kode (i Matlab).

```
Z = DWT2Impl(Z,1,@DWTKernelHaar);
Z = mapto01(Z);
Z = 255*Z;
imshow(uint8(Z));
```

Tilsvarende kode i Python blir

```
DWT2Impl(Z, 1, DWTKernelHaar)
mapto01(Z)
Z *= 255
imshow(uint8(Z))
```

Kommenter denne koden linje for linje. Hva vi vil du se i de fire hjørnene av bildet etter at koden har kjørt, og hvordan kan du forklare dette ut fra hva du vet om filtrene H_0 og H_1 i en Haar wavelet DWT?

Løsningsforslag: Vi ser at bildet vokser lineært i alle rader og alle søyler, og at det vokser med $h = 0.5$ for hvert piksel. Når vi kjører DWT på hver søyle, så vil da nedre halvdel av matrisen (detaljkoeffisientene) ha samme konstante verdi. Når vi så kjører DWT på de nedre radene, så vil nedre venstre hjørne gi en konstant verdi, mens nedre høyre hjørne vil gi 0. Ved å argumentere på samme måte ved å filtrere rader først så vil man på samme måte se at øvrte høyre hjørne også får en konstant verdi. Øvre venstre hjørne vil som vanlig gi en lavresolusjonstilnærming til bildet, som da også blir et bilde som vokser lineært i begge retninger. Hvis vi viser bildet med `imshow` vil de andre tre kvadrantene se like ut, siden de konstante verdiene er relativt små h eller 0 sammenlignet med verdiene som blir regnet ut i lavresolusjonstilnærmingen/første kvadrant.

Man kan her også argumentere med at høypassfilteret H_1 vi bruker for Haar-waveleten svarer til partiell derivasjon. Det vi ser i enten øvre høyre eller nedre venstre hjørne svarer til det vi får når vi partiellderiverer $f(x, y) = x+y$ med tanke på x og y, som gir konstant verdi 1. Når vi partiellderiverer f i både x og y får vi 0, som forklarer hvorfor vi får 0 i nedre høyre hjørne.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 6 Konveksitet

Vi har et optimeringsproblem med ulikhetsbetingelser $g_1(\boldsymbol{x}) \leq 0$, $g_2(\boldsymbol{x}) \leq 0, \ldots,$ $g_r(\boldsymbol{x}) \leq 0$, der alle funksjoner $g_j(\boldsymbol{x})$ er konvekse. Skriv ned barrierfunksjonen $\phi(\boldsymbol{x})$, og vis at denne er en konveks funksjon. Det er kanskje enklere å vise dette under antagelsen at $g_j(\boldsymbol{x})$ er to ganger deriverbare. Du vil også få litt poeng for dette, men for å få full uttelling skal du ikke bruke denne antagelsen.
Hint: Du vil få bruk for at funksjonen $-\ln x$ er avtagende og konveks.
Løsningsforslag: Barrierfunksjonen er definert ved at

$$\phi(\boldsymbol{x}) = -\sum_{j=1}^{r} \ln(-g_j(\boldsymbol{x})).$$

Siden en sum av konvekse funksjoner er konveks, så er det nok å vise at $-\ln(-g_j(\boldsymbol{x}))$ er konveks. Dette er lettest å vise under antagelsen at g_j er to ganger deriverbar. Hvis vi antar en variabel så har vi da at $(-\ln(-g_j))' = -g_j'/g_j$, og $(-\ln(-g_j))'' = (g_j^2 - g_j g_j'')/g_j^2 \geq 0$, slik at $-\ln(-g_j)$ er konveks. Når g_j er en funksjon i flere variable utledet vi i kapittel 6 at

$$\nabla^2(-\ln(-g_j(\boldsymbol{x}))) = \frac{1}{g_j^2(\boldsymbol{x})}\nabla g_j(\boldsymbol{x})\nabla g_j(\boldsymbol{x})^T + \frac{1}{(-g_j(\boldsymbol{x}))}\nabla^2 g_j(\boldsymbol{x}),$$

og fra dette uttrykket fulgte det at $\boldsymbol{h}^T\nabla^2(-\ln(-g_j(\boldsymbol{x})))\boldsymbol{h} \geq 0$ for alle $\boldsymbol{h}$ når g_j er konveks, slik at $\nabla^2(-\ln(-g_j(\boldsymbol{x})))$ er positiv semidefinit, og da er $-\ln(-g_j(\boldsymbol{x}))$ konveks.

Hvis vi ikke har noen antagelser om deriverbarhet så må vi mer generelt vise at

$$-\ln(-g_j(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y})) \leq \lambda(-\ln(-g_j(\boldsymbol{x}))) + (1-\lambda)(-\ln(-g_j(\boldsymbol{y}))).$$

Siden g_j er konveks har vi at

$$g_j(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \leq \lambda g_j(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)g_j(\boldsymbol{y}),$$

og dermed

$$-g_j(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \geq \lambda(-g_j(\boldsymbol{x})) + (1-\lambda)(-g_j(\boldsymbol{y})).$$

Siden $-\ln x$ er avtagende så har vi da at

$$-\ln(-g_j(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y})) \leq -\ln(\lambda(-g_j(\boldsymbol{x})) + (1-\lambda)(-g_j(\boldsymbol{y}))).$$

Siden $-\ln x$ også er konveks får vi og at

$$-\ln(\lambda(-g_j(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)(-g_j(\boldsymbol{y}))) \leq \lambda(-\ln(-g_j(\boldsymbol{x})))+(1-\lambda)(-\ln(-g_j(\boldsymbol{y}))).$$

Det følger nå at

$$-\ln(-g_j(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y})) \leq \lambda(-\ln(-g_j(\boldsymbol{x}))) + (1-\lambda)(-\ln(-g_j(\boldsymbol{y}))),$$

slik at $-\ln(-g_j(\boldsymbol{x}))$ er konveks.

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 7 Ikkelineær optimering

7a

Vi vil finne minimum for funksjonen

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

under betingelsene $2x+y+z=1$, og ved hjelp av Newtons metode. Formuler et steg med Newtons metode, d.v.s. uttrykk $\boldsymbol{x}_{k+1}$ ved $\boldsymbol{x}_k$ (husk at du må bake inn betingelsen i metoden din!). Hvor mange steg vil du trenge å gjøre med Newtons metode for å finne minimum for akkurat dette problemet?

Løsningsforslag: Vi hadde at $\nabla f = (2x, 2y, 2z) = 2\boldsymbol{x}$, og får også at $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$. Andreordens Taylortilnærmingen til f i $\boldsymbol{x}_k$ er da $f(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_k) + (\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^T \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{h}$ Newtons metode får vi når vi minimerer denne (i $\boldsymbol{h}$) under betingelsen $A\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{b}$, det vil si at $A\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$. Lagranges metode gir da at $\nabla f(\boldsymbol{x}_k) + \nabla^2 f(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{h} + A^T\lambda = \boldsymbol{0}$. Dette gir at

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 f(\boldsymbol{x}_k) & A^T \\ A & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(\boldsymbol{x}_k) \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

eller

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{h} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\boldsymbol{x}_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Siden f i dette tilfellet er identisk med sin andregradstilnærming, og Newtons metode nettopp finner minumum for denne (under den gitte betingelsen), så vil Newtons metode her bare trenge en iterasjon.

7b

Vi vil nå finne minimum for funksjonen

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

under betingelsene $2x+y+z=1$, og $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ (det vil si samme problem som i a., men med tre ulikhetsbetingelser i tillegg). Finn minimum ved å sette opp KKT-betingelsene.

Løsningsforslag: Betingelsene kan skrives $h_1(x,y,z) = 2x+y+z-1 = 0$, $g_1(x,y,z) = -x \leq 0$, $g_2(x,y,z) = -y \leq 0$, $g_3(x,y,z) = -z \leq 0$. Vi får at $\nabla h_1 = (2,1,1)$, og at $\nabla g_i = -\boldsymbol{e}_i$. KKT-betingelsene blir derfor

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu_1\boldsymbol{e}_1 - \mu_2\boldsymbol{e}_2 - \mu_3\boldsymbol{e}_3 = 0,$$

samt at $h_1(x,y,z) = 0$, $g_i(x,y,z) \leq 0$, $\mu_i \geq 0$, og $\mu_i = 0$ når g_i ikke er aktiv. Hvis ingen av ulikhetene er aktive får vi at $x = 2y$ og $z = y$. På grunn av betingelsen $2x+y+z=1$ gir dette $6y=1$, slik at $(x,y,z) = (1/3, 1/6, 1/6)$, med verdi $f(1/3,1/6,1/6) = 1/6$.

(Fortsettes på side 8.)

Det er ikke mulig at alle ulikhetene er aktive, for da er ikke h_1 oppfylt.
For de resterende mulighetene kan vi derfor anta at en av ulikhetene er aktiv, og at en ikke er det. Hvis g_j ikke er aktiv så er det klart fra komponent j i KKT-betingelsene at $\lambda < 0$. Hvis g_i er likningen som er aktiv får vi da ved innsetting at μ_i er negativ, som den ikke skal være. Vi har derfor ikke flere kandidater til minimum.
Til slutt må vi se på punkter som ikke er regulære. For å skape et lineært avhengighetsforhold mellom noen av ∇h_1, ∇g_1, ∇g_2, og ∇g_3, så er det klart at vi trenger alle fire vektorene. Men da må vi ha at alle ulikhetene er aktive, som vi så at var umulig. Alle punkter er derfor regulære. Det er videre klart at f faktisk må ha et minimum, siden området vi minimerer over er lukket og begrenset. Dermed er $f(1/3, 1/6, 1/6) = 1/6$ eneste kandidat til minimum.

SLUTT