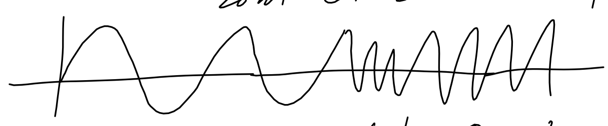
Kap. 5.,6., 9,10 = del II

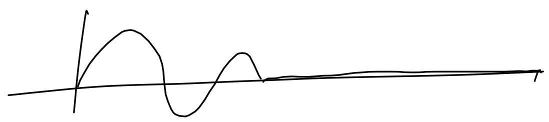
Del I: Tilnærmet funksjoner/vektorer
med trigonometriske funksjoner/vektorer.

Begrensninger:

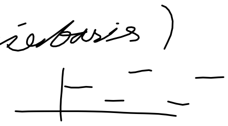
1. Frekvensrepresentasjonen forandrer seg ikke over tid.
2. Selv om en lyd kan skrives enkelt som en sum av frekvens på første del av en lyd, og på andre halvdel av en del, så kan ikke lyden som helhet skrives enkelt som en sum av frekvenser.



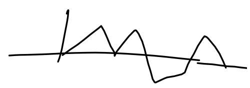
3. Problematisk hvis lyd $\neq 0$ bare på et lite intervall



Wavelets: Nye funksjonsbaser vi skal bruke for å tilnærme funksjoner
Mange baser er mulige (så ikke "bare" en Fourierbasis)
base 1: stykkevis konstante funksjoner 5.1–5.3



base 2: stykkevis lineære funksjoner. 5.4–5.5



Dekomposisjon av f i en wavelet-basis:

splitter opp f som en sum av en tilnærming på lav resolusjon/oppløsning, og detaljer med forskjellige oppløsninger.

$$f = g_0 + e_0 + e_1 + \cdots + e_{m-1}$$

m = antall resolusjoner / oppløsninger.

Viser på foil

g_0

$g_0 + e_0$

$g_0 + e_0 + e_1$

Kan få høyere oppløsning ved å ta utgangspunkt i en lavresolusjonstilnærming, og gradvis legge til detaljer ($e_0, e_1, \ldots$)

Multiresolusjonsanalyse (MRA)

Bevis for lemma 5.3

ϕ_{n_1}, ϕ_{n_2} er ortogonale for $n_1 \neq n_2$:

$\phi \neq 0$ kun på $[0,1)$

$\phi_n \neq 0$ kun på $[n, n+1)$

$$\int_0^N \underbrace{\phi_{n_1}(t)}_{\neq 0 \text{ på } [n_1,n_1+1)} \underbrace{\phi_{n_2}(t)}_{\neq 0 \text{ på } [n_2,n_2+1)} dt = \int_0^N 0 \, dt = \underline{0}$$

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_0^N \phi_n(t)\phi_n(t)dt = \int_n^{n+1} 1 \, dt = (n+1) - n = \underline{1}$$

Bevis for lemma 5.5

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \phi(2^m t - n) \qquad u = 2^m t - n \qquad dt = 2^{-m} du$$

$$\langle \phi_{m,n}, \phi_{m,n} \rangle = \int_0^N 2^m \phi(2^m t - n)\phi(2^m t - n) dt$$

$$= \int_0^N 2^m 2^{-m} \phi(u)\phi(u) du = \int_0^N \phi(u)\phi(u) = 1$$

når er $\phi_{m,n}(t) \neq 0$: $2^{\frac{m}{2}} \phi(2^m t - n) \neq 0$

$$0 \leq 2^m t - n \leq 1 \iff n \leq 2^m t \leq n+1$$

$$\iff \boxed{n 2^{-m} \leq t \leq (n+1) 2^{-m}}$$

$$\int_{n2^{-m}}^{(n+1)2^{-m}} 2^{m/2} f(t) dt$$

ϕ_{m,n_1}, ϕ_{m,n_2}

$\neq 0$ på $[n_1 2^{-m}, (n_1+1)2^{-m})$ $\quad \neq 0$ på $[n_2 2^{-m}, (n_2+1)2^{-m})$

intervaller som ikke overlapper når $n_1 \neq n_2$

$$\Rightarrow \phi_{m,n_1}, \phi_{m,n_2} = 0 \Rightarrow \{\phi_{m,n}\}_{n=0}^{2^m N - 1} \text{ er ortogonale}$$

$$\sum_{n=0}^{2^m N - 1} \langle f, \phi_{m,n} \rangle \phi_{m,n}$$

$\dim(V_m) = 2^m N$

Når f ikke er stykkevis konstant ser vi på $\text{proj}_{V_m} f$ i stedet.

Bevis for teorem 5.6

Enhver f som er kontinuerlig på $[0,N]$, er også uniformt kontinuerlig på $[0,N]$, dvs.

for en ε finnes alltid en δ slik at $|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon$,

$$\Uparrow$$

$$|t_1-t_2|<\delta$$

Siden f er kont, velger vi en m slik at $2^{-m}<\delta$

Definer $g(t)=\sum_{n=0}^{2^m N-1} f(n2^{-m})\,2^{-\frac{m}{2}}\,\phi_{m,n} \in V_m$

Anta nå $t\in[n2^{-m},(n+1)2^{-m}) \Rightarrow g(t)=f(n2^{-m})\cdot 2^{-\frac{m}{2}}2^{\frac{m}{2}}=f(n2^{-m})$

$|f(t)-g(t)|=|f(t)-f(n2^{-m})|<\varepsilon$ siden $|t-n2^{-m}|<2^{-m}<\delta$

Har da også $\|f-g\|$ blir liten.

Bevis for lemma 5.8: $\phi_{m,n}(t)\neq 0 \iff t\in[n2^{-m},(n+1)2^{-m})$

$2^{m/2}\phi(2^m t-n)$

Vi har $\overset{\phi_{0,n}}{[n,n+1)} = [n,n+\tfrac12)\cup[n+\tfrac12,n+1)$

$$= \underbrace{[2n2^{-1},(2n+1)2^{-1})}_{\text{der } \phi_{1,2n}\neq 0} \cup \underbrace{[(2n+1)2^{-1},(2n+2)2^{-1})}_{\text{der } \phi_{1,2n+1}\neq 0}$$

$\phi_{1,2n}=2^{\frac12}$ der $\qquad \phi_{1,2n+1}=2^{\frac12}$ der

$$\underbrace{\phi_{0,n}=\frac{1}{\sqrt2}\left(\phi_{1,2n}+\phi_{1,2n+1}\right)}_{\phi_{m,n}}$$

$\Rightarrow V_0\subset V_1$

Mer generelt: $[n2^{-m},(n+1)2^{-m}) = [2n2^{-(m+1)},(2n+1)2^{-(m+1)}) \cup [(2n+1)2^{-(m+1)},(2n+2)2^{-(m+2)})$

$2^{\frac m2}$ $\qquad 2^{\frac{m+1}{2}}$

$\phi_{m,n}$ $\qquad \phi_{m+1,2n}$ $\qquad \phi_{m+1,2n+1}$

$\Rightarrow \phi_{m,n}=\frac{1}{\sqrt2}\left(\phi_{m+1,2n}+\phi_{m+1,2n+1}\right) \Rightarrow V_m\subset V_{m+1}$

Når W_m er ort. kompl. til V_m i V_{m+1} skriver vi og

$$V_{m+1} = V_m \overset{\text{direkte sum}}{\oplus} W_m$$

(sum av vektorrom: $V + W = \{ v + w$, der $v \in V$, $w \in W \}$.

dekomp. blir unik hvis V og W er lin. uavh. rom.

(anta at $v_1 + w_1 = v_2 + w_2 \Rightarrow v_1 - v_2 = w_2 - w_1$, som strider mot at rommene er lineært uavhengige)

Får på samme måte: $\psi_{m-1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_{m,2n} + \phi_{m,2n+1} \right)$