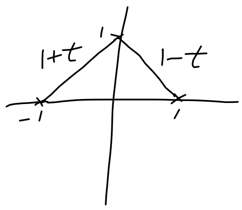
5.4 Hva hvis vi bytter ut med stykkevis lineære funksjoner?

Def 5.18 V_m er rommet av kontinuerlige funksjoner som er stykkevis lineære på $[n2^{-m}, (n+1)2^{-m})$

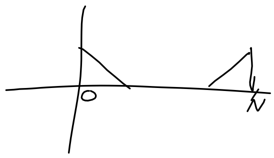
Lemma 5.19

Vi definerer $\phi(t) = \begin{cases} 1-|t| & : -1 \le t \le 1 \\ 0 & : 0 \text{ ellers} \end{cases}$



(ϕ antas å være periodisk med periode N)

ϕ fra 0 til N:



Vi definerer også $\phi_{m,n} = 2^{m/2}\phi(2^m t - n)$

og $\Phi_m = \{\phi_{m,n}\}_{n=0}^{2^m N - 1}$

Da er Φ_m en basis for V_m, og $\phi_{0,n}$ er den „funksjonen i V_0 med "minst support"

der funksjonen er $\neq 0$

Bevis: Vi regner ut

$\underbrace{\phi_{m,n'}}_{\in \Phi_m}(n2^{-m}) = 2^{m/2}\phi(2^m(n2^{-m}) - n') = 2^{m/2}\underbrace{\phi(n-n')}_{0 \text{ eller } 1}$

$= \begin{cases} 2^{m/2} & \text{når } n = n' \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Se på $L_m : f \in V_m \to \{f(n2^{-m})\}_{n=0}^{2^m N - 1} \to \mathbb{R}^{2^m N - 1}$ (samplene til f)

Vi viste at $L_m \phi_{m,n} = 2^{m/2}\vec{e}_n$ standardbasisvektor

$\Rightarrow L_m$ er en isomorfi (1-1, og "på", den treffer hele rommet den går til)

$\Rightarrow \phi_{m,n}$ lin. uavh. $\Rightarrow \phi_{m,n}$ basis for V_m (siden enhver funksjon i V_m er unikt bestemt fra samplene $n2^{-m}$)

Hvis $g \in V_0$ har mindre support enn $\phi_{0,n}$

$\Rightarrow g(n') = 0$ for $n' \neq n$ $\Rightarrow L_0 g = c e_n$

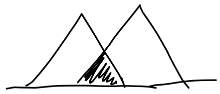
$\Rightarrow g = c\,\phi_{0,n}$

Lemma 5.20

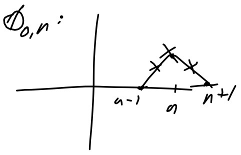
$f \in V_m \Rightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{2^m N-1} \underbrace{f(n 2^{-m}) 2^{-\frac{m}{2}}}_{\text{koordinater til } f \text{ i } V_m} \phi_{m,n}(t)$

Lemma 5.21 $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m \subset \cdots$ også her

Bevis:
Viser bare $V_0 \subset V_1$
Anta $g \in V_0 \Rightarrow g$ kont. og stykkevis lineær på $[n, n+1)$
$\Rightarrow g$ stykkevis lineær på $[n, n+\frac{1}{2})$ og $[n+\frac{1}{2}, n+1)$
$[2n 2^{-1}, (2n+1)2^{-1})$ og $[(2n+1)2^{-1}, (2n+2)2^{-1})$
$\Rightarrow g \in V_1$, siden g er stykkevis lineær på alle $[n 2^{-1}, (n+1)2^{-1})$



Lemma 5.22 $\phi_{0,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}\phi_{1,2n-1} + \phi_{1,2n} + \frac{1}{2}\phi_{1,2n+1})$



Bevis:
Lemma 5.20 sier at $\phi_{0,n}(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} \underbrace{\phi_{0,n}(k/2)}_{} 2^{-\frac{1}{2}} \phi_{1,k}(t)$

1 når $\frac{k}{2} = n \Rightarrow k = 2n$
$\frac{1}{2}$ når $\frac{k}{2} = n \pm \frac{1}{2} \Rightarrow k = 2n \pm 1$
0 ellers

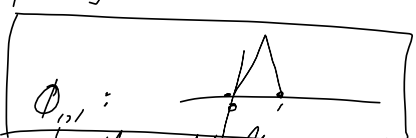
$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\phi_{1,2n-1}(t) + \phi_{1,2n}(t) + \frac{1}{2}\phi_{1,2n+1}(t)\right)$

Definisjon 5.23

La $g_1(t) = \sum_{n=0}^{2N-1} c_{1,n} \phi_{1,n} \in V_1$

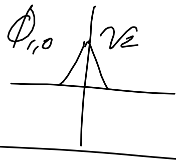
Vi definerer $g_0 = P(g_1) \in V_0$ som funksjonen i V_0 som går gjennom $g_1(0), g_1(1), \dots, g_1(N-1)$.

($g_0 = g_1$ i heltallene)



Dette er $\neq$ projeksjon ned på V_0: $\quad$ 0 i alle heltall

ex 5.31: $\text{proj}_{V_0} \phi_{1,1} \neq 0$ $\quad \Rightarrow P(\phi_{1,1}) = 0$



Lemma 5.24 $\quad P\phi_{1,n} = \begin{cases} \sqrt{2}\,\phi_{0,\frac{n}{2}} & n \text{ partall} \\ 0 & n \text{ oddetall} \end{cases}$

Vi definerer $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{1,1}(t)$, $\quad \psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n)$

Lemma 5.25

Vi definerer $W_0 = \{ f \in V_1 \mid f(n) = 0 \text{ i alle heltall } n \}$

mer generelt $W_m = \{ f \in V_{m+1} \mid f(n 2^{-m}) = 0 \text{ , alle heltall } n \}$

Anta $g_1 \in V_1$, $g_0 = P(g_1)$. Da har vi at

1. $e_0 = g_1 - g_0$ (feilen) er i W_0
2. $\{\psi_{0,n}\}_{n=0}$ er en basis for W_0
3. V_0, W_0 lineært uavhengige, og $V_1 = V_0 \oplus W_0$

Bevis 1: $(g_1 - g_0)(n) = g_1(n) - g_0(n) = g_1(n) - g_1(n) = 0$

$\Rightarrow g_1 - g_0 \in W_0$

2: $\psi_{0,n}(t) = \psi(t-n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{1,1}(t-n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2}\, \phi(2(t-n)-1)$

$= \phi(2t - (2n+1)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{1,2n+1}(t)$

$\Rightarrow \text{span}_n \{\psi_{0,n}\} = \text{span}_n \{\phi_{1,2n+1}\}$

$\Rightarrow \psi_{0,n}$ lin. uavhengig subsett av ϕ_1 $\Rightarrow$ $\{\psi_{0,n}\}_{n=0}^{N-1}$ utspenner rom av dim N

Det er også klart at $\psi_{0,n} \in W_0$ $\Rightarrow$ $\{\psi_{0,n}\} \subset W_0$, som også har dim N

$\Rightarrow \{\psi_{0,n}\}_{n=0}^{N-1}$ basis for W_0.

3: V_0, W_0 lin. uavh.: $\quad$ Anta $\sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_{0,n} + \sum_{n=0}^{N-1} b_n \psi_{0,n} = 0$

sett inn k heltall, og bruker at $\psi_{0,n}(k) = 0$ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_{0,n}(k) = 0$

$= a_k = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} b_n \psi_{0,n} = 0 \Rightarrow b_n = 0$ siden $\psi_{0,n}$ lin. uavh.

$\Rightarrow V_0, W_0$ lin. uavh.

$V_1 = V_0 \oplus W_0$: Siden $V_0 \subset V_1$, $W_0 \subset V_1$ så må $V_0 \oplus W_0 \subset V_1$.

Siden $\dim V_1 = 2N$, og $\dim V_0 = N$, $\dim W_0 = N$

$\Rightarrow \dim(V_0 \oplus W_0) = 2N$

siden V_0, W_0 lin. uavh.

$\Rightarrow \underbrace{V_0 \oplus W_0}_{2N} = \underbrace{V_1}_{2N}$

Teorem 5.26: $\{\psi_{m,n}\}_{n=0}^{2^m N - 1}$ er en basis for W_m

DWT kan defineres som for

$\Phi_m \to \Phi_0 \oplus \Psi_1 \oplus \Psi_2 \oplus \cdots \oplus \Psi_{m-1}$ $\qquad \Phi_1 \to \Phi_0 \oplus \Psi_0$

Vi har vist:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_{0,n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\phi_{1,2n-1} + \phi_{1,2n} + \frac{1}{2}\phi_{1,2n+1}\right) \\ \psi_{0,n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,2n+1} \end{aligned}}$$

Dette betyr at $P_{\phi_1 \leftarrow \mathcal{C}_1}$ (IDWT) $\qquad \mathcal{C}_1 = \{\phi_{0,0}, \psi_{0,0}, \phi_{0,1}, \psi_{0,1}, \dots\}$

er

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{1}{2} & & 0 & \\ \vdots & \vdots & 0 & & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\phi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\phi_{1,-1} + \phi_{1,0} + \frac{1}{2}\phi_{1,1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\phi_{1,N-1} + \phi_{1,0} + \frac{1}{2}\phi_{1,1}\right)$$

en matrise på formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda & 1 & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \lambda & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \\ \lambda & 0 & \vdots & \end{pmatrix} = B_\lambda$$

kalles for en liftingmatrise av odde type

Det er lett å se at $(B_\lambda)^{-1} = B_{-\lambda}$

dem denne.

Ser at IDWT:

```
x = x/sqrt(2);
x = lifting_odd_symm(0.5, x, bd_mode)
```

DWT

```
x = x*sqrt(2)
x = lifting_odd_symm(-0.5, x, bd_mode)
```