Kap. 13 Ikkelineære ligninger og løsninger

Er av typen

$x_1^2 - x_1 x_2^{-3} + \cos x_1 = 1$

$5x_1^4 + 2x_1^3 - \tan(x_1 x_2^8) = 3$

Skrives på formen $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ der $\vec{F}(\underbrace{x_1, x_2}_{\vec{x}}) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$

med $F_1(x) = x_1^2 - x_1 x_2^{-3} + \cos x_1 - 1$

$F_2(x) = 5x_1^4 + 2x_1^3 - \tan(x_1 x_2^8) - 3$

Lineært system $A\vec{x} = \vec{b}$ $\quad \vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$

Antar $m = n$.

$F(\vec{x}) = \vec{0}$ skrives også ofte på formen $K(\vec{x}) = \vec{x}$ $\quad$ $\vec{x}$ fikspunkt.

(sett $K(\vec{x}) = F(\vec{x}) + \vec{x}$)

$K(\vec{x}) = \vec{x}$: Fikspunktslikning.

$\vec{x} = K(\vec{x})$

Løses ofte numerisk ved iterasjon: $x_{k+1} = K(\vec{x}_k)$

Hvis $x_k \to x^*$ så er det da klart at x^* er et fikspunkt.

Når virker slik fikspunktsiterasjon.

K kalles en kontraksjon hvis det finnes $0 \le c < 1$ s.a. $\|K(x) - K(y)\| \le c\|x - y\|$

(K kalles da også c-Lipschitz).

Teorem 13.1 Banachs kontraksjonsprinsipp $(x_{k+1} = K(x_k))$

Anta K kontraksjon. Da har K et unikt fikspunkt x^*, og $x_k \to x^*$ lineært (dvs. $\|x_{k+1} - x^*\| \le C\|x_k - x^*\|$)

$\Rightarrow \|x_k - x^*\| \le C^k \|x_0 - x^*\|$

Bevis: Anta at både x og y er fikspunkter (forskjellige)

$\Rightarrow \|x-y\| = \|K(x) - K(y)\| \le C\|x-y\|$

$\|x-y\| \ne 0 \Rightarrow 1 \le C$, motsigelse $\Rightarrow x = y$, $\Rightarrow$ kan kun ha ett fikspunkt.

$\|x_{k+1} - x_k\| = \|K(x_k) - K(x_{k-1})\| \le C\|x_k - x_{k-1}\| \le \cdots \le C^k \|x_1 - x_0\|$

$\|x_m - x_0\| = \|\sum_{k=0}^{m-1}(x_{k+1} - x_k)\| \le \sum_{k=0}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \le \sum_{k=0}^{m-1} C^k \|x_1 - x_0\|$

$\cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + x_3 - \cancel{x_2}$

$= \frac{1-C^m}{1-C}\|x_1 - x_0\| \le \frac{1}{1-C}\|x_1 - x_0\|$

$\|x_{s+m} - x_s\| \le C\|x_{s+m-1} - x_{s-1}\| \le \cdots \le C^s \|x_m - x_0\|$

$\le \frac{C^s}{1-C}\|x_1 - x_0\| \to 0$ når $s \to \infty$

$\Rightarrow \{x_k\}$ er en Cauchy-følge, og er da konvergent i $\mathbb{R}$, $x_k \to x^*$.

x^* er et fikspunkt: $\|x^* - K(x^*)\| = \|x^* - x_m + x_m - K(x^*)\|$

$\le \|x^* - x_m\| + \|x_m - K(x^*)\|$

$= \|x^* - x_m\| + \|K(x_{m-1}) - K(x^*)\|$

$\le \underbrace{\|x^* - x_m\|}_{\downarrow\, 0} + C\underbrace{\|x_{m-1} - x^*\|}_{\downarrow\, 0}$

$\Rightarrow \|x^* - K(x^*)\| = 0 \Rightarrow K(x^*) = x^*$.

$\|x_{k+1} - x^*\| = \|K(x_k) - K(x^*)\| \le C\|x_k - x^*\| \le \cdots C^{k+1}\|x_0 - x^*\|$ ∎

Newtons metode.

Førsteordens Taylor til F i x_k: $F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)$

Newtons metode setter x_{k+1} til nullpunktet for denne:

$$F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k) = 0$$

$$F'(x_k)x = F'(x_k)x_k - F(x_k)$$

hvis $F'(x_k)$ invertebar

$$\underline{x_{k+1} = x = x_k - (F'(x_k))^{-1}F(x_k)}$$

Konvergens av Newtons metode: Med $G(x) = x - (F'(x))^{-1}F(x)$

skal ikke gjøre fikspunktsiterasjon med G

Teorem 13.2: Hvis Newton konvergerer, så konvergerer den superlineært.

<u>Bevis</u>: Vi har at

$$F(x^*) = 0 = F(x_k + (x^* - x_k))$$

$$= F(x_k) + F'(x_k)(x^* - x_k) + \underline{O(\|x_k - x^*\|)}$$

gang med $F'(x_k)^{-1}$, flytt over

$$\Rightarrow \underline{x_k} - x^* - \underline{(F'(x_k))^{-1}F(x_k)} = O(\|x_k - x^*\|)$$

$$\Rightarrow x_{k+1} - x^* = O(\|x_k - x^*\|)$$, som er det samme som superlineær k.

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} \to 0$$

Hvor nær x^* må første iterasjon x_0 være for at Newton skal konvergere mot x_0?

$F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, U åpen og konveks. Antar og

(i) $\|F'(x) - F'(y)\|_2 \le L\|x-y\|$, $x, y \in U$

(ii) $\|F'(x_0)\|_2 \le K$ for en $x_0 \in U$.

$\|A\|_2$ er spektralnormen til en matrise (største singulærverdi)

Teorem 13.3 Kantorovich teorem.

Anta $\bar{B} = B(x_0, \frac{1}{KL}) \subseteq U$, $\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \le \frac{1}{2KL}$, og at (i) og (ii) oppfylt.
Da er $F'(x)$ inverterbar for alle $x \in B$, og Newtons metode med start i x_0 gir en sekvens $x_k \in B$, som konvergerer mot et nullpunkt x^*. ($F(x^*)=0$), og $x^* \in B$.

Problem med Newtons metode: Må ha et eksakt uttrykk for F og for Jacobimatrisen, men $F(x_k)$ kan godt være gitt kun ved punktverdier, dvs. ingen formel.

Vi lager derfor tilnærmelser til Jacobimatrisen.

Tilnærmer $F'(x_k)$ med en matrise B_k

Søkeretning, dvs $\vec{p}$ som er slik at $x_{k+1} = x_k + p$

Newton: $p = -(F'(x_k))^{-1}F(x_k)$

$$\Updownarrow$$

$$F'(x_k)\vec{p} = -F(x_k)$$

Her: $B_k \vec{p} = -F(\vec{x}_k)$

Definisjon 13.4 Broydens metode:

Oppdater B_k til B_{k+1} ved å løse $B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = F(x_{k+1}) - F(x_k)$

og $B_{k+1}\vec{x} = B_k\vec{x}$ for alle $\vec{x}$ som er ortogonale på $x_{k+1} - x_k$.

Formel for B_{k+1} uttrykt med B_k:

Setter $s_k = x_{k+1} - x_k$ $\quad y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$

krever $B_{k+1}s_k = y_k$

projeksjonen ned på rommet utspent av s_k er $\dfrac{s_k s_k^T}{s_k^T s_k}$

projeksjonen ned på ortogonalkomplementet til denne er $\underline{I - \dfrac{s_k s_k^T}{s_k^T s_k}}$

Matrisen $B = \dfrac{y_k s_k^T}{s_k^T s_k}$ oppfyller $Bs_k = y_k$, og er 0 på ortogonalkomplementet.

Derfor kan vi sette $B_{k+1} = B_k\left(I - \underline{\underline{\dfrac{s_k s_k^T}{s_k^T s_k}}}\right) + \underline{\underline{\dfrac{y_k s_k^T}{s_k^T s_k}}}$,

som oppfyller $B_{k+1}s_k = y_k$

og $B_{k+1}\vec{x} = B_k\vec{x}$ for $\vec{x}$ i ortogonalkomplementet.

Dette kan også skrives $B_{k+1} = \underbrace{B_k + \dfrac{(y_k - B_k s_k)s_k^T}{s_k^T s_k}}_{\text{rang 1}}$

Dette er en rang 1-oppdatering av B_k, som er effektive å regne ut.

Man kan vise at Broydens metode konvergerer superlineært.