1. Vis at om A, B, C, D er kollineære, så er

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{BD}\cdot\overline{CA}+\overline{CD}\cdot\overline{AB}=0.$$

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{BD}\cdot\overline{CA}+\overline{CD}\cdot\overline{AB}$$

$$=\overline{AD}\left(\overline{BA}+\overline{AC}\right)+\overline{BD}\cdot\overline{CA}+\overline{CD}\cdot\overline{AB}$$

$$=\overline{AD}\cdot\overline{BA}+\overline{AD}\cdot\overline{AC}+\overline{BD}\cdot\overline{CA}+\overline{CD}\cdot\overline{AB}$$

$$=\overline{DA}\cdot\overline{AB}+\overline{CD}\cdot\overline{AB}+\overline{DA}\cdot\overline{CA}+\overline{BD}\cdot\overline{CA}$$

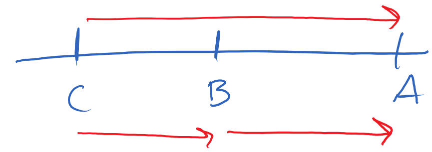
$$=\overline{AB}\cdot\left(\overline{CD}+\overline{DA}\right)+\overline{CA}\left(\overline{BD}+\overline{DA}\right)$$

$$=\overline{AB}\cdot\overline{CA}+\overline{CA}\cdot\overline{BA}=0$$

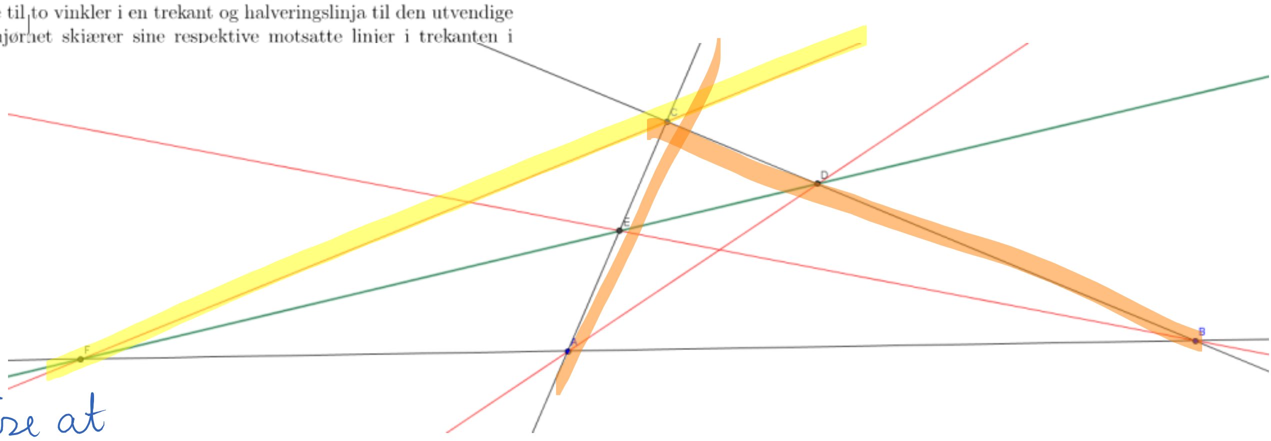
(fordi $\overline{AB}=-\overline{BA}$)

A, B, C kollineære, så er

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$



2. Vis at halveringslinjene til to vinkler i en trekant og halveringslinja til den utvendige vinkelen i det tredje hjørnet skjærer sine respektive motsatte linier i trekanten i kollinear punkter.



Vil vise at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1$$

Siden linja CF halverer den utvendige vinkelen i C, så deler den linjestykket $\overline{AB}$ utvendig i forholdet $\frac{-AC}{CB}$

(dvs $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -\frac{AC}{CB}$)

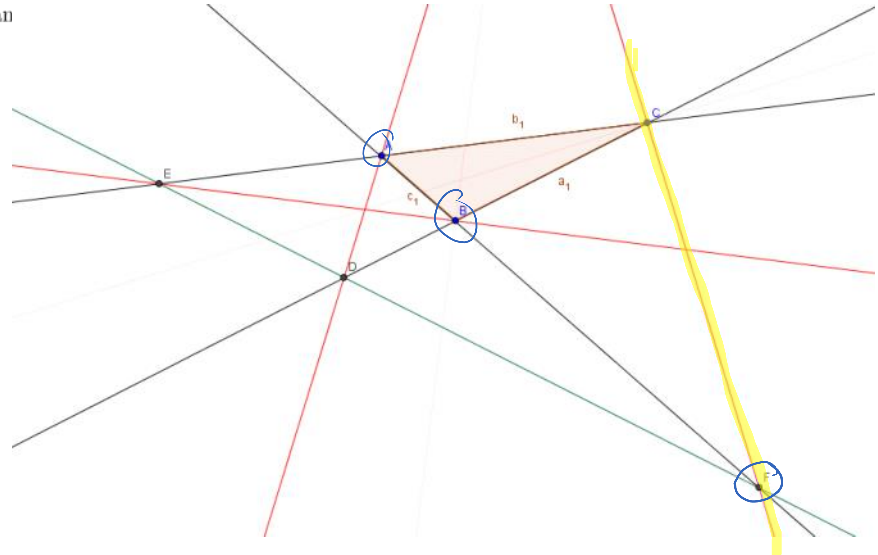
på samme måte får vi at

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{CB}{BA} \quad \text{og} \quad \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{BA}{AC} \quad (\text{forklar!})$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\cancel{BA}}{\cancel{AC}} \cdot \frac{\cancel{CB}}{\cancel{BA}} \cdot \frac{-\cancel{AC}}{\cancel{CB}} = \underline{-1}$$

Dermed er D, E, F kollineære!

3. Vis at halveringslinjene til de utvendige vinklene i en trekan
motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.



Bruk halveringsetningen til å forklare

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -\frac{AC}{BC},$$

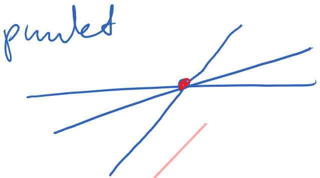
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC}$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -\frac{CB}{BA}$$

Vis at $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -1$

5. Bruk Cevas setning til å vise at
   a) Høydene i en trekant er konkurrente.
   b) Medianene i en trekant er konkurrente.
   c) Vinklenes halveringslinjer i en trekant er konkurrente.

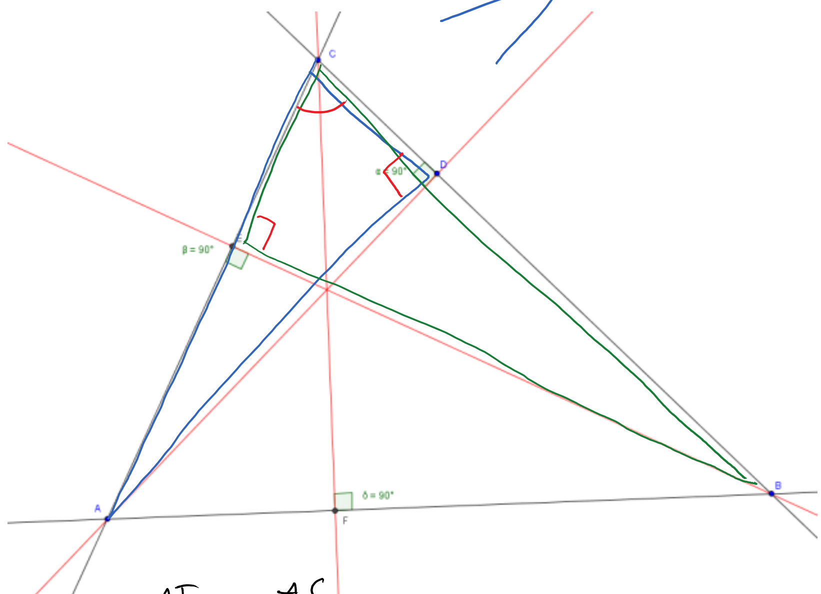
At tre linjer er konkurrente betyr at de skjærer hverandre i ett felles punkt



(anta at trekanten ikke har en rett vinkel)

CEVA: start å vise:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

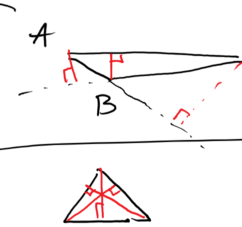


- $\triangle ADC$ og $\triangle BEC$ er formlike

  dermed vet vi at
  $$\frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}$$

- $\triangle CFA$ og $\triangle BEA$ formlike $\Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}$
- $\triangle ADB$ og $\triangle CFB$ formlike $\Rightarrow \frac{DB}{FB} = \frac{AB}{CB}$

Se først på
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{EC}{DC} \cdot \frac{AF}{AE} \cdot \frac{BD}{FB}$$
$$= \frac{\cancel{BC}}{\cancel{AC}} \cdot \frac{\cancel{AC}}{\cancel{AB}} \cdot \frac{\cancel{AB}}{\cancel{CB}} = 1$$



én butt vinkel $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} < 0$ og $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} < 0$

ingen butte vinkler

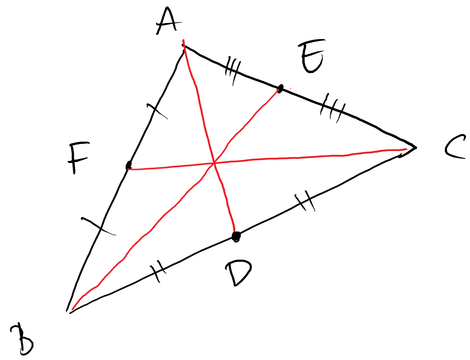
fortegnet til $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$ finner vi ved å

se på fortegnene til hver faktor

får at betingelsen fra CEVA's setn. holder.

(Ceva linjene kan ikke være parallelle, fordi de står normalt på ikke-parallelle linjer)

Dermed er høydene i trekanten konkurrente b)

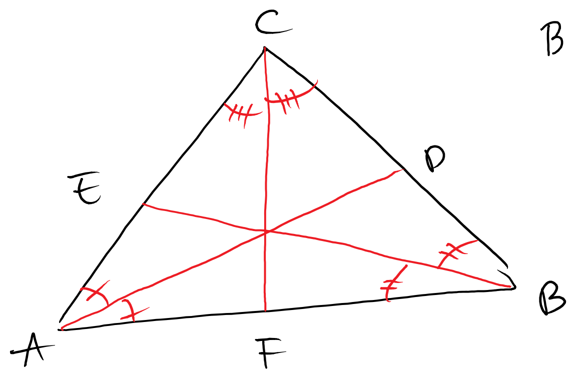


skal vise at

$$\underbrace{\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}}_{=1} = 1$$

osv..

c)



Bruk halverings-setningen og forklar:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{AC}{CB}$$

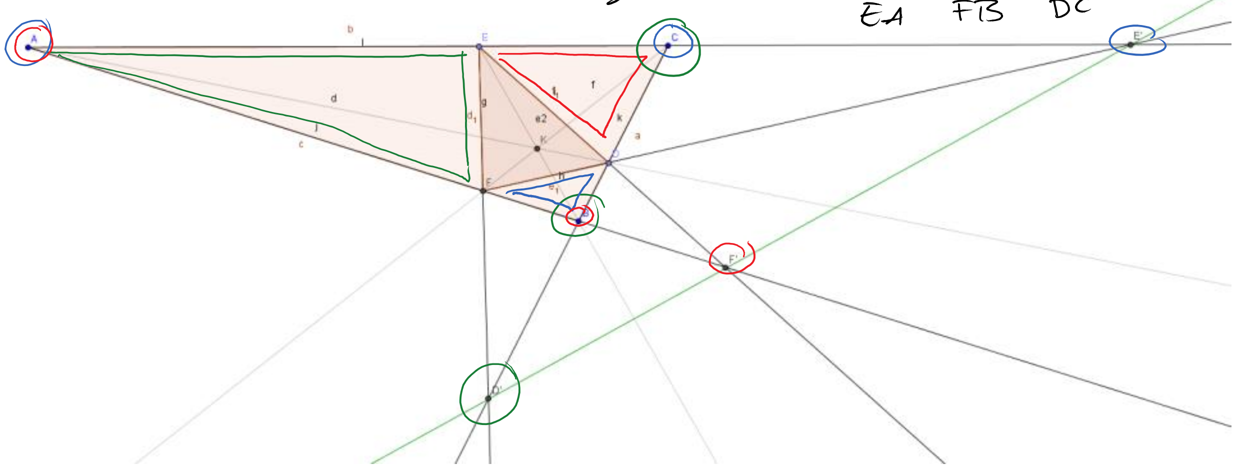
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{BA}{AC}$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{CB}{BA}$$

osv..

7. La AD, BE og CF være tre Ceva-linjer til en trekant $\triangle ABC$ som er konkurrente. Anta at linjene gjennom EF, FD, og DE skjærer linjene gjennom BC, CA og AB respektivt i punktene D', E' og F'. Vis at D', E' og F' er kollineære.

Vet at siden AD, BE, CF er Ceva-linjer som er konkurrente så holder $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=1$



- D', E', F' er Menelaos-punkter til $\triangle EFD$

Holder derfor å vise at $\frac{\overline{DF'}}{\overline{F'E}}\cdot\frac{\overline{ED'}}{\overline{D'F}}\cdot\frac{\overline{FE'}}{\overline{E'D}}=-1$

1) Vet at $\underbrace{\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{FD'}}{\overline{D'E}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{CA}}}_{(*)}=-1$ fordi B, D', C er kollineære menelaos-punkter for $\triangle AFB$

2) På samme måte er

$$\underbrace{\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{DE'}}{\overline{E'F}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{AB}}}_{(**)}=-1$$

3) og

$$\underbrace{\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{EF'}}{\overline{F'D}}}_{(***)}=-1$$

Ved å multiplisere V.S. fra 1), 2) og 3) får vi at

$$-1=(*)\cdot(**)\cdot(***)$$

$$=\left(\frac{\overline{E'D}}{\overline{DF'}}\cdot\frac{\overline{D'F}}{\overline{FE'}}\cdot\frac{\overline{F'E}}{\overline{ED'}}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{\overline{EC}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{AE}}\right)}_{=1\ \text{(Ceva)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{E'D}}{\overline{DF'}}\cdot\frac{\overline{DF'}}{\overline{E'F}}\cdot\frac{\overline{F'E}}{\overline{ED'}}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{E'D}}{\overline{DF'}} \cdot \frac{\overline{DF'}}{\overline{F'E}} \cdot \frac{\overline{F'E}}{\overline{ED'}} = -1$$

Dermed er D', E', F' kollineare.