

MAT0100V

Sannsynlighetsregning og kombinatorikk

Betinget sannsynlighet og uavhengige hendelser

Produktsetningen

Total sannsynlighet og Bayes' setning

Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

1

Betinget sannsynlighet

Vil repeterer først et eksempel fra samlingen sist uke

Eksempel 4.1: Legger fire røde kort og to svarte kort i en bunke



2

Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til



Ser på hendelsene:

$A = \text{«første kort rødt»}$ $B = \text{«andre kort svart»}$

Vi har at $P(A) = 4/6 = 2/3$

Hvis A har inntruffet er sannsynligheten for B lik $2/5$

Dette er den *betingede sannsynligheten* for B gitt A

Vi skriver $P(B|A) = 2/5$

3

I eksempel 4.1 er det *intuitivt* klart hva betinget sannsynlighet er

Det er ikke alltid like enkelt:

- Hva er den betingede sannsynligheten for at begge kortene er røde gitt at minst ett av dem er rødt?
- Hva er den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?

Vi trenger en definisjon av betinget sannsynlighet!

Svarene på spørsmålene er gitt i oppgave 27 og eksempel 4.5

4

Vi kom på samlingen sist uke fram til følgende *definisjon* av betinget sannsynlighet:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ved å bytte om «rollene» til A og B

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

5

Eksempel 4.4:

Bunke med fire røde og to svarte kort

Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til



A = «første kort rødt» B = «andre kort svart»

Vil bestemme $P(B | A)$ ut fra definisjonen
(det gir en «sjekk» på at definisjonen er rimelig)

6

Vi kan trekke to kort på $6 \cdot 5 = 30$ måter

Vi kan trekke først et rødt og så et svart kort på
 $4 \cdot 2 = 8$ måter

Vi kan trekke det første kort rødt på $4 \cdot 5 = 20$ måter

Det gir

$$P(A \cap B) = \frac{8}{30} \quad P(A) = \frac{20}{30}$$

Dermed er

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{8/30}{20/30} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

(selvfølgelig!)

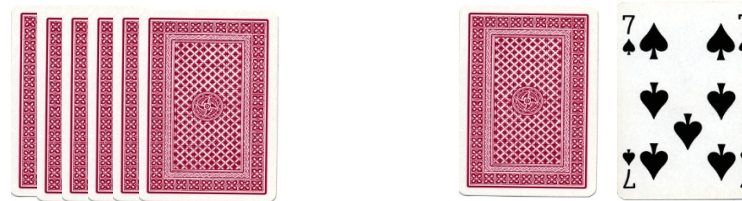
7

Eksempel 4.5:

Bunke med fire røde og to svarte kort

Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til

Hva er den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?



A = «første kort rødt» B = «andre kort svart»

Vil bestemme $P(A | B)$

8

Vi har fra eksempel 4.4 at $P(A \cap B) = \frac{8}{30}$

Vi kan få et svart kort andre gang på to måter:

- først rødt, så svart kort, dvs $A \cap B$
- to svarte kort, dvs $\bar{A} \cap B$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 5} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

dvs lik sannsynligheten for at første kort er svart

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{8/30}{10/30} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

9

Hva betyr det egentlig at den betingede sannsynligheten er $4/5 = 80\%$ for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?

Husk at *sannsynlighet er relativ frekvens i det lange løp*

- At $P(A) = 2/3$ betyr at det første kortet vil være rødt ca $2/3$ av gangene i det lange løp
- At $P(A | B) = 4/5$ betyr at *hvis vi bare teller med de gangene der det andre kortet er svart*, så vil det første kortet være rødt ca $4/5$ *av disse gangene* i det lange løp

10

Produktsetningen

Definisjon av betinget sannsynlighet:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Denne gir *produktsetningen*:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Tilsvarende:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$$

11

Eksempel 4.6:

En klasse med 11 jenter og 14 gutter skal velge medlem og varamedlem til elevrådet

Ingen vil stille, så det trekkes lodd

Hva er sannsynligheten for at to gutter blir valgt?

$A = \text{«gutt blir medlem»}$ $B = \text{«gutt blir varamedlem»}$

$$P(A) = \frac{14}{25} \qquad P(B | A) = \frac{13}{24}$$

$$P(\text{to gutter blir valgt}) = P(A \cap B)$$

$$= P(A) \cdot P(B | A) = \frac{14}{25} \cdot \frac{13}{24} = 0.303$$

Merk at vi også kan løse oppgaven ved å se på hvor mange måter vi kan trekke to elever og på hvor mange måter vi kan trekke to gutter (eksempel 3.2)

12

Produktsetningen for tre hendelser:

$$\begin{aligned}P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A \cap B) \cdot P(C | A \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A \cap B)\end{aligned}$$

Produktsetningen gjelder på tilsvarende måte for fire og flere hendelser

13

Eksempel 4.7:

Etter offentlig statistikk er sannsynligheten:

- 95% for at 65 år gammel kvinne skal bli minst 70 år
- 92% for at 70 år gammel kvinne skal bli minst 75 år
- 87% for at 75 år gammel kvinne skal bli minst 80 år

Hva er sannsynligheten for at 65 år gammel kvinne skal bli minst 80 år?

Tar for oss 65 år gammel kvinne:

A = «kvinnen blir minst 70 år»

B = «kvinnen blir minst 75 år»

C = «kvinnen blir minst 80 år»

14

Opplysningene gir:

- $P(A) = 0.95$
- $P(B | A) = 0.92$
- $P(C | A \cap B) = 0.87$

Hvis kvinnen blir minst 80 år, blir hun også minst 70 år og minst 75 år

Derfor er $A \cap B \cap C = C$

$$\begin{aligned}P(\text{minst 80 år}) &= P(C) = P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A \cap B) \\ &= 0.95 \cdot 0.92 \cdot 0.87 = 0.76\end{aligned}$$

15

Oppgave 30 Etter offentlig statistikk er sannsynligheten

- 93% for at en 65 år gammel mann skal bli minst 70 år
- 89% for at en 70 år gammel mann skal bli minst 75 år
- 81% for at en 75 år gammel mann skal bli minst 80 år

Hva er sannsynligheten for at en 65 år gammel mann

- skal bli minst 80 år
- vil oppleve sin 75-årsdag, men ikke sin 80-årsdag

Løsning:

a) $P(\text{minst 80 år}) = 0.93 \cdot 0.89 \cdot 0.81 = 0.67$

b) $P(\text{bli 75 år, men ikke 80 år}) = 0.93 \cdot 0.89 \cdot (1 - 0.81) = 0.16$

16

Avhengige og uavhengige hendelser

- Hvis $P(A | B) = P(A)$ er A og B *uavhengige* hendelser
- Hvis $P(A | B) \neq P(A)$ er A og B *avhengige* hendelser

Enkelte ganger kan en undersøke ved regning om hendelser er uavhengige

Vanligvis er uavhengighet en modellantagelse

17

Hvis A og B er *uavhengige* hendelser:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

For tre *uavhengige* hendelser A , B og C :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Tilsvarende resultat gjelder for fire og flere *uavhengige* hendelser

18

Eksempel 4.8: I en søskenflokk er det tre barn som ikke er tvillinger eller trillinger
Antar at barnas kjønn er uavhengig av hverandre

Produktsetningen gir:

$$P(\text{eldste gutt, to andre jenter}) \\ = 0.514 \cdot 0.486 \cdot 0.486 = 0.121$$

$$P(\text{miderste gutt, to andre jenter}) \\ = 0.486 \cdot 0.514 \cdot 0.486 = 0.121$$

$$P(\text{yngste gutt, to andre jenter}) \\ = 0.486 \cdot 0.486 \cdot 0.514 = 0.121$$

Addisjonssetningen for disjunkte hendelser gir:

$$P(\text{en gutt og to jenter}) = 3 \cdot 0.121 = 0.363$$

19

Oppgave 29 Sannsynligheten for at en gutt er fargeblind, er 8,0%.

- Hva er sannsynligheten for at en gutt har normalt fargesyn?
- Aleksander, Gaute og Mads er venner. Hva er sannsynligheten for at alle har normalt fargesyn?
- Per, Pål og Espen er brødre. Kan vi finne sannsynligheten for at alle har normalt fargesyn på samme måte som i oppgave b? (Du skal ikke regne her.)

Løsning:

- $P(\text{normalt fargesyn}) = 1 - P(\text{fargeblind}) = 1 - 0.08 = 0.92$
- $P(\text{alle tre normalt fargesyn}) = 0.92^3 = 0.78$
- Nei, for vi kan ikke anta uavhengighet (slik vi gjorde i punkt b)

20

Oppgave 33 Vi kaster en terning fire ganger.

- Hvorfor er det rimelig å anta at resultatene for de ulike kastene er uavhengige?
- Hva er sannsynligheten for at vi ikke får en eneste sekser?
- Hva er sannsynligheten for at vi får nøyaktig en sekser?

Løsning :

a) Resultatet av et terningkast blir ikke påvirket av resultatene av de andre

b) $P(\text{ingen seksere}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.482$

c) $P(\text{én sekser}) = P(\text{sekser i første kast, fem eller mindre i de andre})$
 $+ P(\text{sekser i andre kast, fem eller mindre i de andre})$
 $+ P(\text{sekser i tredje kast, fem eller mindre i de andre})$
 $+ P(\text{sekser i fjerde kast, fem eller mindre i de andre})$
 $= 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.386$

21

Eksempel 4.9: Kast en terning til vi får sekser og registrer hvor mange kast vi må gjøre

Sett $P(k) = P(\text{første sekser i } k\text{-te kast})$

For å få første sekser i k -te kast må vi ikke få sekser i de $k - 1$ første kastene og så få sekser

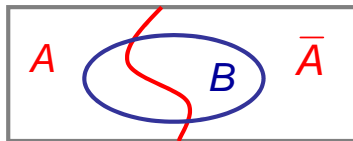
Siden resultatene av kastene er uavhengige får vi

$$P(k) = \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6}}_{k-1 \text{ ganger}} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

22

Total sannsynlighet

Vi kan skrive en hendelse B som en disjunkt union av $A \cap B$ og $\bar{A} \cap B$



Dette og produktsetningen gir setningen om **total sannsynlighet**

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$
$$= P(A) \cdot P(B | A) + P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A})$$

23

Eksempel 5.10:

En bedrift produserer varer på to maskiner

Maskin I produserer 40% av varene

Maskin II produserer 60% av varene

4% av varene fra maskin I er defekte

2% av varene fra maskin II er defekte

En vare velges tilfeldig fra lageret

Hva er sannsynligheten for at varen er defekt?

24

$A = \text{«varen kommer fra maskin I»}$

$B = \text{«varen er defekt»}$

Opplysningene gir:

$$P(A) = 0.40 \quad P(\bar{A}) = 0.60$$

$$P(B | A) = 0.04 \quad P(B | \bar{A}) = 0.02$$

Setningen om total sannsynlighet gir:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \cdot P(B | A) + P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A}) \\ &= 0.40 \cdot 0.04 + 0.60 \cdot 0.02 \\ &= 0.028 \end{aligned}$$

25

Oppgave 40 I en eske er det fem hvite og tre grønne kuler. Du trekker en kule fra esken og ser hvilken farge den har. Uten å legge kula tilbake trekker du en kule til og ser hvilken farge denne har. Hva er sannsynligheten for at

- a) begge kulene er grønne
- b) første kule er hvit og andre grønn
- c) andre kule er grønn

Løsning:

$$\text{a) } P(\text{begge kulene grønne}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$$

$$\text{b) } P(\text{første kule hvit, andre kule grønn}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(\text{andre kule grønn}) &= P(\text{begge kulene grønne}) + P(\text{første kule hvit, andre kule grønn}) \\ &= \frac{6}{56} + \frac{15}{56} = \frac{21}{56} = 0.375 \end{aligned}$$

26