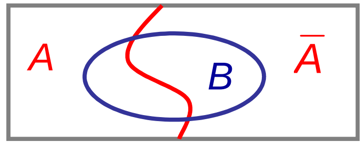
MAT0100V
Sannsynlighetsregning og kombinatorikk

Total sannsynlighet og Bayes' setning
Kombinatorikk
Ordnede utvalg med og uten tilbakelegging

Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Total sannsynlighet

Vi kan skrive en hendelse *B* som en disjunkt union av $A \cap B$ og $\bar{A} \cap B$



Dette og produktsetningen gir setningen om *total sannsynlighet*

$$\boxed{\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \mid \bar{A}) \end{aligned}}$$

Eksempel 5.10:

En bedrift produserer varer på to maskiner

Maskin I produserer 40% av varene
Maskin II produserer 60% av varene

4% av varene fra maskin I er defekte
2% av varene fra maskin II er defekte

En vare velges tilfeldig fra lageret

Hva er sannsynligheten for at varen er defekt?

A = «varen kommer fra maskin I»
B = «varen er defekt»

Opplysningene gir:

$P(A) = 0.40$ $\qquad$ $P(\bar{A}) = 0.60$

$P(B \mid A) = 0.04$ $\qquad$ $P(B \mid \bar{A}) = 0.02$

Setningen om total sannsynlighet gir:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \mid \bar{A}) \\ &= 0.40 \cdot 0.04 + 0.60 \cdot 0.02 \\ &= 0.028 \end{aligned}$$

Oppgave 41 I en eske er det to mynter. Den ene er normal, mens den andre har krone på begge sider. Du trekker tilfeldig en mynt og kaster den. Hva er sannsynligheten for at den viser krone?

Se på hendelsene *N* = «normal mynt» og *K* = «krone»

Vi har at:

$$P(N) = P(\bar{N}) = \frac{1}{2} \qquad P(K \mid N) = \frac{1}{2} \qquad P(K \mid \bar{N}) = 1$$

Setningen om total sannsynlighet gir at:

$$P(K) = P(N) \cdot P(K \mid N) + P(\bar{N}) \cdot P(K \mid \bar{N})$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

Eksempel 5.11:

Vi legger

- **fire røde** kort og **to svarte** kort i bunke I
- **to røde** kort og **fire svarte** kort i bunke II

Vi velger tilfeldig én bunke og trekker to kort fra denne

Hva er sannsynligheten for at vi får to røde kort?

Vi ser på hendelsene:

A = «vi trekker fra bunke I»
B = «vi trekker to røde kort»

Opplysningene gir:

$$P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

$$P(B \mid A) = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \frac{6}{15}$$

$$P(B \mid \bar{A}) = \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{15}$$

Setningen om total sannsynlighet gir

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{7}{30} = 0.233$$

Bayes' setning

Definisjon av betinget sannsynlighet:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Vi bruker produktsetningen for telleren og total sannsynlighet for nevneren:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \mid \bar{A})}}$$

Dette er *Bayes' setning*

Eksempel 5.12

Ser på eksempel 5.10

Hvis varen er defekt, hva er da sannsynligheten for at den kommer fra den første maskinen?

A = «varen kommer fra maskin I»
B = «varen er defekt»

$$P(A) = 0.40 \qquad P(\overline{A}) = 0.60$$

$$P(B \mid A) = 0.04 \qquad P(B \mid \overline{A}) = 0.02$$

Bayes setning gir:

$$P(A \mid B) = \frac{0.40 \cdot 0.04}{0.40 \cdot 0.04 + 0.60 \cdot 0.02} = 0.57$$

Oppgave 41 I en eske er det to mynter. Den ene er normal, mens den andre har krone på begge sider. Du trekker tilfeldig en mynt og kaster den. Hva er sannsynligheten for at den viser krone?

I oppgave 41 fant vi at $P(K) = \dfrac{3}{4}$

Oppgave 43 Se på oppgave 41. Mynten viser krone. Hva er sannsynligheten for at du har kastet med den normale mynten?

Bayes' setning gir at:

$$P(N \mid K) = \frac{P(N) \cdot P(K \mid N)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Eksempel 5.13:

Vi ser på eksempel 5.11

Hvis begge kortene er røde, hva er sannsynligheten for at vi trakk fra bunke I ?

A = «vi trekker fra bunke I»
B = «vi trekker to røde kort»

$$P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2} \qquad P(B \mid A) = \frac{6}{15} \qquad P(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{15}$$

Bayes setning gir:

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{15}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15}} = \frac{6}{7}$$

Oppgave (ikke i oppgavesamlingen) I en eske er det to mynter. Den ene er normal, mens den andre har krone på begge sider. Du trekker tilfeldig én mynt og kaster den to ganger.

a) Hva er sannsynligheten for at du får krone i begge kastene?

b) Du fikk krone i begge kastene. Hva er sannsynligheten for at du kastet med den normale mynten?

Se på hendelsene:
N = «normal mynt» KK = «krone i begge kastene»

a) Vi har at:

$$P(N) = P(\overline{N}) = \frac{1}{2}$$

$$P(KK \mid N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad P(KK \mid \overline{N}) = 1$$

Setningen om total sannsynlighet gir at:

$$P(KK) = P(N) \cdot P(KK \mid N) + P(\bar{N}) \cdot P(KK \mid \bar{N})$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{8}$$

b) Bayes' setning gir at:

$$P(N \mid KK) = \frac{P(N) \cdot P(KK \mid N)}{P(KK)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5}$$

Eksempel 5.14:

En kvinne tar en mamografiundersøkelse

Se på hendelsene:

S = «kvinnen har brystkreft»
M = «mammogrammet viser tegn på kreft»

Fra erfaringer med mammografi har vi:

$$P(M \mid S) = 0.95 \qquad P(M \mid \bar{S}) = 0.035$$

Vi antar at $P(S) = 0.007$

Anta at mammogrammet viser tegn på kreft

Hva er da sannsynligheten for at kvinnen virkelig har kreft?

Bayes setning gir:

$$P(S \mid M) = \frac{P(S) \cdot P(M \mid S)}{P(S) \cdot P(M \mid S) + P(\bar{S}) \cdot P(M \mid \bar{S})}$$

$$= \frac{0.007 \cdot 0.95}{0.007 \cdot 0.95 + 0.993 \cdot 0.035} = 0.16$$

Selv om mammogrammet viser tegn på kreft, er det bare 16% sannsynlig at hun virkelig har det

Oppgave 44 Ved å teste for et bestemt hormon i en urinprøve, kan en avgjøre om en kvinne er gravid. En graviditetstest er ikke helt sikker. I en undersøkelse fant en:

- Hvis en kvinne er gravid, er det 98% sannsynlig at testen vil vise det.
- Hvis en kvinne ikke er gravid, er det 1% sannsynlig at testen likevel vil indikere at kvinnen er gravid.

Vi antar at 20% av de kvinnene som tar en graviditetstest, er gravide. En kvinne tar en graviditetstest, og testen indikerer at hun er gravid. Hva er sannsynligheten for at hun virkelig er det?

Se på hendelsene:
G = «gravid» *T* = «testen tyder på graviditet»

Vi har at:

$$P(G) = 0.20 \qquad P(\bar{G}) = 1 - 0.20 = 0.80$$
$$P(T \mid G) = 0.98 \qquad P(T \mid \bar{G}) = 0.01$$

Setningen om total sannsynlighet gir at:

$$P(T) = P(G) \cdot P(T \mid G) + P(\overline{G}) \cdot P(T \mid \overline{G})$$
$$= 0.20 \cdot 0.98 + 0.80 \cdot 0.01 = 0.204$$

Bayes' setning gir at:

$$P(G \mid T) = \frac{P(G) \cdot P(T \mid G)}{P(T)} = \frac{0.20 \cdot 0.98}{0.204} = 0.961$$

Kombinatorikk

For å bruke en uniform sannsynlighetsmodell må vi finne antall mulige og antall gunstig utfall

I enkle situasjoner som kast med to terninger kan vi skrive opp alle mulige utfall og alle utfall som er gunstige for den hendelsen vi er interessert i

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

"Sum sju øyne"

I Lotto er det over 5 millioner vinnerrekker

Vi må være veldig tålmodige for å skrive opp alle disse!

Vi må derfor kunne beregne antall mulige vinnerrekker uten å skrive dem opp

Kombinatorikk er navnet på den delen av matematikken som gir oss løsningen på dette og liknende problemer

Multiplikasjonssetningen

Eksempel 6.1:
På en meny er det:
- 4 forretter
- 10 hovedretter
- 5 desserter

Hovedretter:

Karamellpudding
Svinesteik
Lammesteik
Kyllingbryst
Kalkun
Pekingand

På hvor mange måter kan vi sette sammen et måltid med én forrett, én hovedrett og én dessert?

Måltidet kan settes sammen på $4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$ måter

Valget av de tre rettene er en *valgprosess* i tre trinn:
(i) valg av forrett
(ii) valg av hovedrett
(iii) valg av dessert

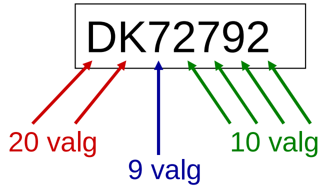
Generelt har vi *multiplikasjonssetningen:*

En valgprosess har r trinn.
I første trinn er det n_1 valgmuligheter,
i andre trinn er det n_2 valgmuligheter, ...
i siste trinn er det n_r valgmuligheter.
Da er det til sammen

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_r$$

valgmuligheter

Eksempel 6.2:
Et bilnummer består av to bokstaver og 5 siffer



Hvor mange bilnummere kan vi lage?

Vi kan lage

$$20 \cdot 20 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 36\,000\,000$$

forskjellige bilnummer

Oppgave 47 På en restaurant kan du velge mellom 5 forretter, 8 hovedretter og 4 desserter. På hvor mange måter kan du sette sammen en middag når den skal bestå av én forrett, én hovedrett og én dessert?

$$5 \cdot 8 \cdot 4 = 160$$

Oppgave 48 En kodelås har 5 taster. Hver av tastene kan plasseres i tre forskjellige stillinger. Hvor mange forskjellige koder kan det lages til denne låsen?

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$$

Ulike typer utvalg

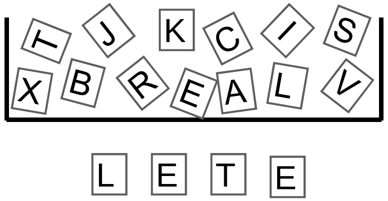
Eksempel 6.3: Vi skriver bokstavene i alfabetet på hver sin lapp og legger de 29 lappene i en eske

Vi trekker så fire lapper, én etter én
Vi sier at vi trekker et *utvalg* på fire bokstaver

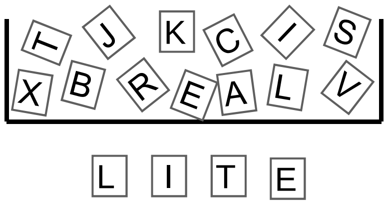
Hvis vi legger en lapp tilbake før vi trekker den neste, trekker vi *med tilbakelegging*
Hvis vi *ikke* legger lappen tilbake, trekker vi *uten tilbakelegging*

Hvis rekkefølgen bokstavene trekkes i har betydning, trekker vi et *ordnet utvalg*
Hvis rekkefølgen *ikke* har betydning, trekker vi et *uordnet utvalg*

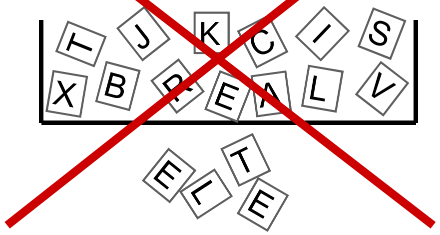
Ordnet utvalg
med tilbakelegging



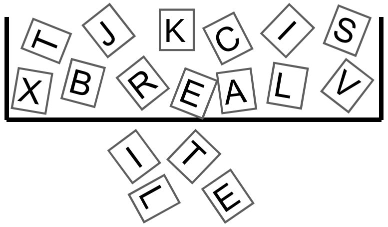
Ordnet utvalg
uten tilbakelegging



~~Uordnet utvalg~~
~~*med* tilbakelegging~~



Uordnet utvalg
uten tilbakelegging



Ordnet utvalg med tilbakelegging

Se på bokstaveksempelet

Hver gang vi trekker er det 29 bokstaver å velge mellom

Vi kan velge de fire bokstavene på

$$29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = 707281$$

forskjellige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen

Generelt har vi en mengde med *n* elementer, og vi velger *r* elementer fra mengden med tilbakelegging

Da kan vi lage $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{r \text{ ganger}} = n^r$ ordnede utvalg

Eksempel 6.4:
På en tippekupong er det gitt 12 kamper

For hver kamp skal en tippe H, U eller B

Hvor mange forskjellige tipperekker kan vi lage?

TIPPING	1
1. Røa - Team Strømmen	H U B
2. Liverpool - West Bromwich	H U B
3. Sunderland - Portsmouth	H U B
4. Hull - Bolton	H U B
5. West Ham - Everton	H U B
6. Reading - Derby	H U B
7. Wolverhampton - Burnley	H U B
8. Nottingham F - Birmingham	H U B
9. Queens PR - Cardiff	H U B
10. Norwich - Preston	H U B
11. Barnsley - Sheffield U	H U B
12. Southampton - Bristol C	H U B

Vi kan lage

$$3 \cdot 3 \cdots 3 = 3^{12} = 531441$$

forskjellige tipperekker

Oppgave 54 I tipping skal en for hver av 12 fotballkamper gjette om det blir hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B). En rekke består av ett tips for hver av de 12 kampene.

a) Når du fyller ut tippekupongen, kan du hel- eller halvgardere en kamp ved at du gir mer enn ett tippetegn for denne. Du leverer en tippekupong med tre hel- og to halvgarderinger. Hvor mange rekker har du tippet?

1. Røa - Team Strømmen	H U B
2. Liverpool - West Bromwich	H U B
3. Sunderland - Portsmouth	H U B
4. Hull - Bolton	H U B
5. West Ham - Everton	H U B
6. Reading - Derby	H U B
7. Wolverhampton - Burnley	H U B
8. Nottingham F - Birmingham	H U B
9. Queens PR - Cardiff	H U B
10. Norwich - Preston	H U B
11. Barnsley - Sheffield U	H U B
12. Southampton - Bristol C	H U B

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^3 = 108$$

b) På baksiden av tippekupongen er det gitt en tabell som viser hvor mange rekker du tipper med et visst antall hel- og halvgarderinger. Forklar hvordan Norsk Tipping har kommet fram til denne tabellen.

Systemoversikt

½ gard.	1/1 gard.	Antall rekker	½ gard.	1/1 gard.	Antall rekker
2	0	4	0	4	81
1	1	6	5	1	96
3	0	8	2	3	108
0	2	9	7	0	128
2	1	12	4	2	144
4	0	16	1	4	162
1	2	18	6	1	192
3	1	24	3	3	216
0	3	27	0	5	243
5	0	32	8	0	256
2	2	36	5	2	288
4	1	48	2	4	324
1	3	54	7	1	384
6	0	64	4	3	432
3	2	72	1	5	486

Hvis x er antal halvgarderinger og y er antall helgarderinger, er antall rekker lik $2^x \cdot 3^y$

Ordnet utvalg uten tilbakelegging

Se igjen på bokstaveksempelet

- Første gang er det 29 bokstaver å velge mellom
- Andre gang er det 29-1 bokstaver å velge mellom
- Tredje gang er det 29-2 bokstaver å velge mellom
- Fjerde gang er det 29-3 bokstaver å velge mellom

Vi kan velge de fire bokstavene på

$$29 \cdot (29-1) \cdot (29-2) \cdot (29-3) = 570024$$

forskjellige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen

Generelt har vi en mengde med *n* elementer, og vi velger *r* elementer fra mengden uten tilbakelegging

Da kan vi lage

$${}_nP_r = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}_{r \text{ faktorer}}$$

ordnede utvalg

Eksempel 6.5:
Landslagstreneren i langrenn for menn har sju løpere å velge mellom til en World Cup stafett over 4x10 km

På hvor mange måter kan han sette opp stafett-laget når vi tar hensyn til hvem som skal gå de ulike etappene?

Treneren kan sette opp stafettlaget på

$${}_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

måter

Vi har fortsatt en mengde med *n* elementer, og vi velger *r* elementer fra mengden uten tilbakelegging

Når *r* = *n* velger vi alle elementene.

Da svarer et ordnet utvalg til en bestemt rekkefølge (eller permutasjon) av de *n* elementene

Det er

$$n! = {}_nP_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$$

slike rekkefølger

Merk at vi setter $0! = 1$

Eksempel 6.6:

Vi ser på eksempel 6.5. Treneren har bestemt seg for hvilke fire løpere som skal gå stafetten

Hvor mange lagoppstillinger kan han da velge mellom?

Treneren kan velge mellom

$$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

lagoppstillinger

Oppgave 50 Treneren for en skiklubb kan velge mellom 5 løpere til NM-stafetten for kvinner over 3 × 5 km.

a) Hvor mange måter kan hun sette opp stafettlaget på? (Du skal ta hensyn til hvem som går hver av de tre etappene.)

b) Anta at hun har bestemt seg for hvilke tre løpere som skal gå stafetten, men ikke hvilke etapper hver av dem skal gå. Hvor mange mulige lagoppstillinger kan hun velge mellom?

a) Antall mulige stafettlag:

$${}_5P_3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$$

b) Antall mulige lagoppstillinger:

$$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$$

GeoGebra

Vi kan bruke GeoGebra til å bestemme ${}_nP_r$ og $n!$

Illustrasjon for ${}_7P_4$ og $4!$