MAT0100V
Sannsynlighetsregning og kombinatorikk

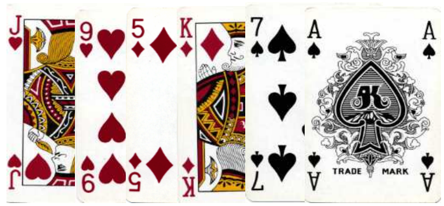
Betinget sannsynlighet og uavhengige hendelser
Produktsetningen
Total sannsynlighet og Bayes' setning

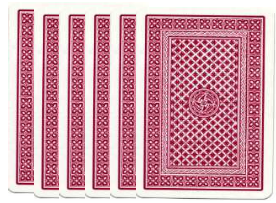
Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Betinget sannsynlighet

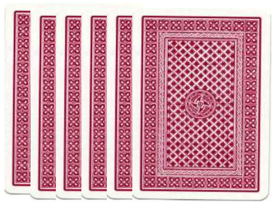
Vil repeterer først et eksempel fra samlingen for to uker siden

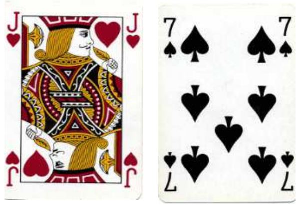
Eksempel 4.1: Legger fire røde kort og to svarte kort i en bunke





Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til





Ser på hendelsene:

A = «første kort rødt» B = «andre kort svart»

Vi har at $P(A) = 4/6 = 2/3$

Hvis A har inntruffet er sannsynligheten for B lik 2/5

Dette er den *betingede sannsynligheten* for B gitt A

Vi skriver $P(B\,|\,A) = 2/5$

I eksempel 4.1 er det *intuitivt* klart hva betinget sannsynlighet er

Det er ikke alltid like enkelt:

- Hva er den betingede sannsynligheten for at begge kortene er røde gitt at minst ett av dem er rødt?
- Hva er den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?

Vi trenger en definisjon av betinget sannsynlighet!

Svarene på spørsmålene er gitt i oppgave 27 og eksempel 4.5

Vi kom på samlingen sist uke fram til følgende *definisjon* av betinget sannsynlighet:

$$\boxed{P(B\,|\,A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Ved å bytte om «rollene» til *A* og *B*

$$\boxed{P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Eksempel 4.4:

Bunke med fire røde og to svarte kort

Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til

A = «første kort rødt» *B* = «andre kort svart»

Vil bestemme $P(B\,|\,A)$ ut fra definisjonen
(det gir en «sjekk» på at definisjonen er rimelig)

Vi kan trekke to kort på 6 · 5 = 30 måter

Vi kan trekke først et rødt og så et svart kort på 4 · 2 = 8 måter

Vi kan trekke det første kort rødt på 4 · 5 = 20 måter

Det gir

$$P(A \cap B) = \frac{8}{30} \qquad P(A) = \frac{20}{30}$$

Dermed er

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{8/30}{20/30} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

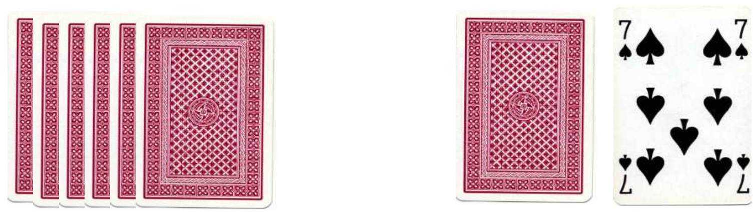
(selvfølgelig!)

Eksempel 4.5:

Bunke med fire røde og to svarte kort

Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til

Hva er den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?



A = «første kort rødt» *B* = «andre kort svart»

Vil bestemme $P(A\,|\,B)$

Vi har fra eksempel 4.4 at $P(A \cap B) = \frac{8}{30}$

Vi kan få et svart kort andre gang på to måter:

- først rødt, så svart kort, dvs $A \cap B$
- to svarte kort, dvs $\overline{A} \cap B$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 5} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

dvs lik sannsynligheten for at første kort er svart

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{8/30}{10/30} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Hva betyr det egentlig at den betingede sannsynligheten er 4/5 = 80% for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?

Husk at *sannsynlighet er relativ frekvens i det lange løp*

- At $P(A)$ = 2/3 betyr at det første kortet vil være rødt ca 2/3 av gangene i det lange løp
- At $P(A \mid B) = 4/5$ betyr at *hvis vi bare teller med de gangene der det andre kortet er svart,* så vil det første kortet være rødt ca 4/5 *av disse gangene* i det lange løp

Produktsetningen

Definisjon av betinget sannsynlighet:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Denne gir *produktsetningen:*

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)}$$

Tilsvarende:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Eksempel 4.6:

En klasse med 11 jenter og 14 gutter skal velge medlem og varamedlem til elevrådet

Ingen vil stille, så det trekkes lodd
Hva er sannsynligheten for at to gutter blir valgt?

A = «gutt blir medlem» B = «gutt blir varamedlem»

$$P(A) = \frac{14}{25} \qquad P(B \mid A) = \frac{13}{24}$$

$$P(\text{to gutter blir valgt}) = P(A \cap B)$$

$$= P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{14}{25} \cdot \frac{13}{24} = 0.303$$

Merk at vi også kan løse oppgaven ved å se på hvor mange måter vi kan trekke to elever og på hvor mange måter vi kan trekke to gutter (eksempel 3.2)

Produktsetningen for tre hendelser:

$$P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A \cap B) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

$$= P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

Produktsetningen gjelder på tilsvarende måte for fire og flere hendelser

Eksempel 4.7:
Etter offentlig statistikk er sannsynligheten:

- 95% for at 65 år gammel kvinne skal bli minst 70 år
- 92% for at 70 år gammel kvinne skal bli minst 75 år
- 87% for at 75 år gammel kvinne skal bli minst 80 år

Hva er sannsynligheten for at 65 år gammel kvinne skal bli minst 80 år?

Tar for oss 65 år gammel kvinne:

A = «kvinnen blir minst 70 år»

B = «kvinnen blir minst 75 år»

C = «kvinnen blir minst 80 år»

Opplysningene gir:

- P(A)=0.95
- P(B | A) = 0.92
- P(C | A ∩ B) = 0.87

Hvis kvinnen blir minst 80 år, blir hun også minst 70 år og minst 75 år

Derfor er $A \cap B \cap C = C$

$$P(\text{minst 80 år}) = P(C) = P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

$$= 0.95 \cdot 0.92 \cdot 0.87 = 0.76$$

Oppgave 30 Etter offentlig statistikk er sannsynligheten

- 93% for at en 65 år gammel mann skal bli minst 70 år
- 89% for at en 70 år gammel mann skal bli minst 75 år
- 81% for at en 75 år gammel mann skal bli minst 80 år

Hva er sannsynligheten for at en 65 år gammel mann

a) skal bli minst 80 år

b) vil oppleve sin 75-årsdag, men ikke sin 80-årsdag

Løsning:

a) $P(\text{minst 80 år}) = 0.93 \cdot 0.89 \cdot 0.81 = 0.67$

b) $P(\text{bli 75 år, men ikke 80 år}) = 0.93 \cdot 0.89 \cdot (1 - 0.81) = 0.16$

Avhengige og uavhengige hendelser

- Hvis $P(A \mid B) = P(A)$ er *A* og *B* *uavhengige* hendelser
- Hvis $P(A \mid B) \neq P(A)$ er *A* og *B* *avhengige* hendelser

Enkelte ganger kan en undersøke ved regning om hendelser er uavhengige

Vanligvis er uavhengighet en modellantagelse

Hvis *A* og *B* er *uavhengige* hendelser:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

For tre *uavhengige* hendelser *A, B* og *C*:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Tilsvarende resultat gjelder for fire og flere *uavhengige* hendelser

Eksempel 4.8: I en søskenflokk er det tre barn som ikke er tvillinger eller trillinger
Antar at barnas kjønn er uavhengig av hverandre

Produktsetningen gir:

$$P(\text{eldste gutt, to andre jenter}) = 0.514 \cdot 0.486 \cdot 0.486 = 0.121$$

$$P(\text{miderste gutt, to andre jenter}) = 0.486 \cdot 0.514 \cdot 0.486 = 0.121$$

$$P(\text{yngste gutt, to andre jenter}) = 0.486 \cdot 0.486 \cdot 0.514 = 0.121$$

Addisjonssetningen for disjunkte hendelser gir:

$$P(\text{en gutt og to jenter}) = 3 \cdot 0.121 = 0.363$$

Oppgave (ikke i oppgaveheftet)

Vi kaster én terning tre ganger.

a) Hva er sannsynligheten for at du får ingen seksere?
b) Hva er sannsynligheten for at du får minst én sekser?
c) Hva er sannsynligheten for at du får nøyaktig en sekser?

Løsning :

a) $P(\text{ingen seksere}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.579$

b) $P(\text{minst én sekser}) = 1 - P(\text{ingen seksere}) = 1 - 0.579 = 0.421$

c) $P(\text{én sekser}) = P(\text{sekser i første kast, fem eller mindre i de andre})$

$$+P(\text{sekser i andre kast, fem eller mindre i de andre})$$

$$+P(\text{sekser i tredje kast, fem eller mindre i de andre})$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

$$= 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$= 0.347$$

Eksempel 4.9: Kast en terning til vi får sekser og registrer hvor mange kast vi må gjøre

Sett $P(k)$ = P(første sekser i k-te kast)

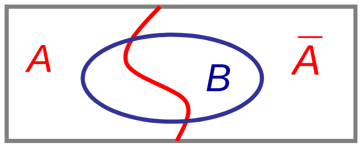
For å få første sekser i k-te kast må vi ikke få sekser i de k – 1 første kastene og så få sekser

Siden resultatene av kastene er uavhengige får vi

$$P(k) = \underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{5}{6}}_{k\,-\,1 \text{ ganger}}\cdot\frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$$

Total sannsynlighet

Vi kan skrive en hendelse *B* som en disjunkt union av $A \cap B$ og $\bar{A} \cap B$



Dette og produktsetningen gir setningen om *total sannsynlighet*

$$\boxed{\begin{aligned} P(B) &= P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B) \\ &= P(A)\cdot P(B\,|\,A) + P(\bar{A})\cdot P(B\,|\,\bar{A}) \end{aligned}}$$

Eksempel 5.10:

En bedrift produserer varer på to maskiner

Maskin I produserer 40% av varene
Maskin II produserer 60% av varene

4% av varene fra maskin I er defekte
2% av varene fra maskin II er defekte

En vare velges tilfeldig fra lageret

Hva er sannsynligheten for at varen er defekt?

A = «varen kommer fra maskin I»
B = «varen er defekt»

Opplysningene gir:

$$P(A) = 0.40 \qquad P(\bar{A}) = 0.60$$
$$P(B \mid A) = 0.04 \qquad P(B \mid \bar{A}) = 0.02$$

Setningen om total sannsynlighet gir:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \mid \bar{A}) \\ &= 0.40 \cdot 0.04 + 0.60 \cdot 0.02 \\ &= 0.028 \end{aligned}$$

Oppgave 40 I en eske er det fem hvite og tre grønne kuler. Du trekker en kule fra esken og ser hvilken farge den har. Uten å legge kula tilbake trekker du en kule til og ser hvilken farge denne har. Hva er sannsynligheten for at

a) begge kulene er grønne
b) første kule er hvit og andre grønn
c) andre kule er grønn

Løsning :

a) $P(\text{begge kulene grønne}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

b) $P(\text{første kule hvit, andre kule grønn}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

c) $P(\text{andre kule grønn})$

$= P(\text{begge kulene grønne}) + P(\text{første kule hvit, andre kule grønn})$

$= \frac{6}{56} + \frac{15}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8} = 0.375$

Eksempel 5.11:

Vi legger

- **fire røde** kort og **to svarte** kort i bunke I
- **to røde** kort og **fire svarte** kort i bunke II

Vi velger tilfeldig én bunke og trekker to kort fra denne

Hva er sannsynligheten for at vi får to røde kort?

A = "vi trekker fra bunke I"
B = "vi trekker to røde kort"

Opplysningene gir:

$$P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

$$P(B \mid A) = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \frac{6}{15} \qquad P(B \mid \bar{A}) = \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{15}$$

Setningen om total sannsynlighet gir

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{7}{30} = 0.233$$

Bayes' setning

Definisjon av betinget sannsynlighet:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Vi bruker produktsetningen for telleren og total sannsynlighet for nevneren:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \mid \bar{A})}}$$

Dette er *Bayes' setning*

Eksempel 5.12

Ser på eksempel 5.10.

Hvis varen er defekt, hva er da sannsynligheten for at den kommer fra den første maskinen?

A = "varen kommer fra maskin I"
B = "varen er defekt"

$$P(A) = 0.40 \qquad P(\bar{A}) = 0.60$$

$$P(B \mid A) = 0.04 \qquad P(B \mid \bar{A}) = 0.02$$

Bayes setning gir:

$$P(A \mid B) = \frac{0.40 \cdot 0.04}{0.40 \cdot 0.04 + 0.60 \cdot 0.02} = 0.57$$

Eksempel 5.13:

Vi ser på eksempel 5.11

Hvis begge kortene er røde, hva er sannsynligheten for at vi trakk fra bunke I ?

A = «vi trekker fra bunke I»
B = «vi trekker to røde kort»

$$P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \qquad P(B \mid A) = \frac{6}{15} \qquad P(B \mid \bar{A}) = \frac{1}{15}$$

Bayes setning gir:

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{15}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15}} = \frac{6}{7}$$

Oppgave (ikke i oppgavesamlingen) I en eske er det to mynter. Den ene er normal, mens den andre har krone på begge sider. Du trekker tilfeldig én mynt og kaster den to ganger.

a) Hva er sannsynligheten for at du får krone i begge kastene?

b) Du fikk krone i begge kastene. Hva er sannsynligheten for at du kastet med den normale mynten?

Se på hendelsene:

N = «normal mynt» *KK* = «krone i begge kastene»

a) Vi har at:

$$P(N) = P(\bar{N}) = \frac{1}{2}$$

$$P(KK \mid N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad P(KK \mid \bar{N}) = 1$$

Setningen om total sannsynlighet gir at:

$$P(KK) = P(N) \cdot P(KK \mid N) + P(\bar{N}) \cdot P(KK \mid \bar{N})$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{8}$$

b) Bayes' setning gir at:

$$P(N \mid KK) = \frac{P(N) \cdot P(KK \mid N)}{P(KK)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5}$$

Eksempel 5.14:

En kvinne tar en mamografiundersøkelse

Se på begivenhetene:

S = "kvinnen har brystkreft"
M = "mammogrammet viser tegn på kreft"

Fra erfaringer med mammografi har vi

$$P(M \mid S) = 0.95 \qquad P(M \mid \bar{S}) = 0.035$$

Vi antar at $P(S) = 0.007$

Anta at mammogrammet viser tegn på kreft

Hva er da sannsynligheten for at kvinnen virkelig har kreft?

Bayes setning gir:

$$P(S \mid M) = \frac{P(S) \cdot P(M \mid S)}{P(S) \cdot P(M \mid S) + P(\bar{S}) \cdot P(M \mid \bar{S})}$$
$$= \frac{0.007 \cdot 0.95}{0.007 \cdot 0.95 + 0.993 \cdot 0.035} = 0.16$$

Selv om mammogrammet viser tegn på kreft, er det bare 16% sannsynlig at hun virkelig har det

Oppgave 44 Ved å teste for et bestemt hormon i en urinprøve, kan en avgjøre om en kvinne er gravid. En graviditetstest er ikke helt sikker. I en undersøkelse fant en:

- Hvis en kvinne er gravid, er det 98% sannsynlig at testen vil vise det.
- Hvis en kvinne ikke er gravid, er det 1% sannsynlig at testen likevel vil indikere at kvinnen er gravid.

Vi antar at 20% av de kvinnene som tar en graviditetstest, er gravide. En kvinne tar en graviditetstest, og testen indikerer at hun er gravid. Hva er sannsynligheten for at hun virkelig er det?

Se på hendelsene:

G = «gravid» $\quad$ T = «testen tyder på graviditet»

Vi har at:

$$P(G) = 0.20 \qquad P(\bar{G}) = 1 - 0.20 = 0.80$$

$$P(T \mid G) = 0.98 \qquad P(T \mid \bar{G}) = 0.01$$

Setningen om total sannsynlighet gir at:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(G)\cdot P(T \mid G) + P(\overline{G})\cdot P(T \mid \overline{G}) \\ &= 0.20\cdot 0.98 + 0.80\cdot 0.01 = 0.204 \end{aligned}$$

Bayes' setning gir at:

$$P(G \mid T) = \frac{P(G)\cdot P(T \mid G)}{P(T)} = \frac{0.20\cdot 0.98}{0.204} = 0.961$$