MAT0100V
Sannsynlighetsregning og kombinatorikk

Uordnet utvalg uten tilbakelegging (repetisjon)
Tilfeldige variabler og sannsynlighetsfordelinger
Hypergeometrisk fordeling
Binomisk fordeling

Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Uordnet utvalg uten tilbakelegging

Eksempel 6.7 (modifisert):

Landslagstreneren i langrenn for menn har sju løpere å velge mellom til en World Cup stafett over 4x10 km

På hvor mange måter kan han ta ut de fire som skal gå stafetten (når vi *ikke* tar hensyn til hvem som skal gå de ulike etappene)?

Antall måter treneren kan ta ut de fire løperne på er

$$_7C_4 = \frac{_7P_4}{4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35$$

Merk at vi kan skrive

$$_7C_4 == \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \binom{7}{4}$$

Generelt har vi en mengde med *n* elementer, og vi velger *r* elementer fra mengden uten tilbakelegging

Antall uordnede utvalg vi kan lage er

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots(r-1)\cdot r}$$

Merk at vi kan skrive

$$_nC_r = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot(n-r-1)\cdots 2\cdot 1}{r!\ (n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!\ (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Vi vil bruke skrivemåten for binomialkoeffisientene $\binom{n}{r}$

Eksempel 6.8 (modifisert):

En klasse har 25 elever

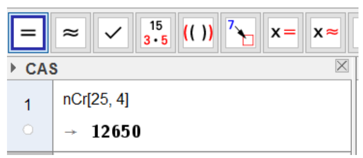
Fire elever skal velges til en festkomité

Hvor mange måter kan det gjøres på?

Antall måter vi kan velge de 4 elevene på er

$$\binom{25}{4} = \frac{25!}{4!\cdot 21!} = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 12650$$

Med GeoGebra:



Eksempel 6.10 (modifisert):

En pokerspiller får delt ut fem kort

Hva er sannsynligheten for at spilleren bare får hjerter?

Antall mulige måter å dele ut fem kort på:

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

Antall av disse som gir bare hjerter:

$$\binom{13}{5} = 1287$$

$$P(\text{bare hjerter}) = \frac{1287}{2598960} = 0.0005$$

Eksempel 6.11: I en kartong er det 12 sikringer

Fire av dem er defekte, resten er i orden

Vi trekker tilfeldig tre sikringer

Hva er sannsynligheten for at én er defekt?

Antall mulige utvalg $\binom{12}{3} = 220$

Antall gunstige utvalg $\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{2} = 4 \cdot 28 = 112$

$$P(\text{én defekt sikring}) = \frac{112}{220} = 0.509$$

Eksempel 6.13:

En pokerspiller får delt ut fem tilfeldig valgte kort

Hva er sannsynligheten for at spilleren får to par?

Antall mulige utvalg: $\binom{52}{5} = 2598960$

Antall gunstige utvalg: $\underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{valg av to verdier}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{valg av to kort i første verdi}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{valg av to kort i andre verdi}} \cdot \underbrace{\binom{44}{1}}_{\text{valg av ett kort i en tredje verdi}} = 123552$

$$P(\text{to par}) = \frac{123552}{2598960} = 0.048$$

Tilfeldige variabler

Når vi kaster to terninger er det 36 utfall

Vi er ofte ikke interessert i de enkelte utfallene

Vi kan for eksempel bare være interessert i X = «summen av antall øyne»

X er en *tilfeldig variabel*

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

De *mulige verdiene* til *X* er 2, 3, 4, … , 11, 12

Ved å telle opp antall gunstige utfall for hendelsen «*X* = *k*» kan vi bestemme *P*(*X* = *k*) for *k* = 2, 3, … , 12

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

«*X* = 7»

P(*X* = 7) = 6/36

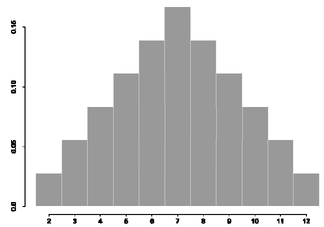
Vi får tabellen:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabellen gir *sannsynlighetsfordelingen* til *X*

Summen av sannsynlighetene i tabellen er lik én

Vi kan vise sannsynlighets-fordelingen med et stolpediagram



Oppgave 77 Du kaster to terninger. La Y være det laveste antall øyne du får på en av de to terningene. Hva er de mulige verdiene til Y? Bestem sannsynlighetsfordelingen til Y.

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

Y = 6
Y = 5
Y = 4
Y = 3
Y = 2
Y = 1

Mulige verdier for *Y* er 1, 2, 3, 4, 5 og 6 (se figuren ovenfor)

k	1	2	3	4	5	6
$P(Y=k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Hypergeometrisk fordeling

Eksempel 7.1: I en kartong er det 12 sikringer

Fire av dem er defekte, resten er i orden

Vi trekker tilfeldig tre sikringer

X = «antall defekte sikringer vi trekker»

Vi vil finne *P*(*X* = *k*)

Antall mulige utvalg $\binom{12}{3}$

Vi kan trekke *k* defekte på $\binom{4}{k}$ måter

Vi kan trekker 3 – *k* som er i orden på $\binom{8}{3-k}$ måter

Antall gunstige utvalg for *k* defekte
(og 3 – *k* som er i orden) er $\binom{4}{k} \cdot \binom{8}{3-k}$

Sannsynlighetsfordelingen til *X*

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{8}{3-k}}{\binom{12}{3}}$$

Sannsynlighetsfordelingen gir

$$P(X=0)=0.255 \qquad P(X=1)=0.509$$

$$P(X=2)=0.218 \qquad P(X=3)=0.018$$

Generelt har vi følgende situasjon:

- Vi har en mengde med *N* elementer
  (I eksempel 7.1 er dette mengden av de 12 sikringene)
- Elementene i mengden kan deles inn i to delmengder D og $\bar{D}$
  Det er *m* elementer i *D* og *N* – *m* elementer i $\bar{D}$
  (I eksempel 7.1 er de to delmengdene de defekte og de ikke-defekte sikringene. Det er 4 defekte sikringer og 12 - 4 = 8 som er i orden)
- Vi trekker tilfeldig *n* elementer fra mengden
  (I eksempel 7.1 trekker vi 3 sikringer)

La *X* være antall elementer vi trekker fra *D*

Ved å resonnere som i eksempelet finner vi at *X* har sannsynlighetsfordelingen

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \cdot \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Vi sier at *X* er *hypergeometrisk fordelt*

Oppgave 79 I en eske er det 6 røde og 4 blå kuler. Vi trekker tilfeldig fire av kulene. La X stå for antall røde kuler vi får.

a) Skriv opp en formel for sannsynlighetsfordelingen til X.

b) Bruk formelen til å finne sannsynligheten for at vi får
(i) bare røde kuler
(ii) 3 røde kuler og 1 blå kule
(iii) 2 røde kuler og 2 blå kule

a)

$$P(X = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{4}{4-k}}{\binom{10}{4}} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

b.i)

$$P(\text{bare røde kuler}) = P(X = 4)$$

$$= \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{15 \cdot 1}{210} = 0.071$$

b.ii)

$$P(3 \text{ røde kuler og 1 blå kule}) = P(X=3)$$

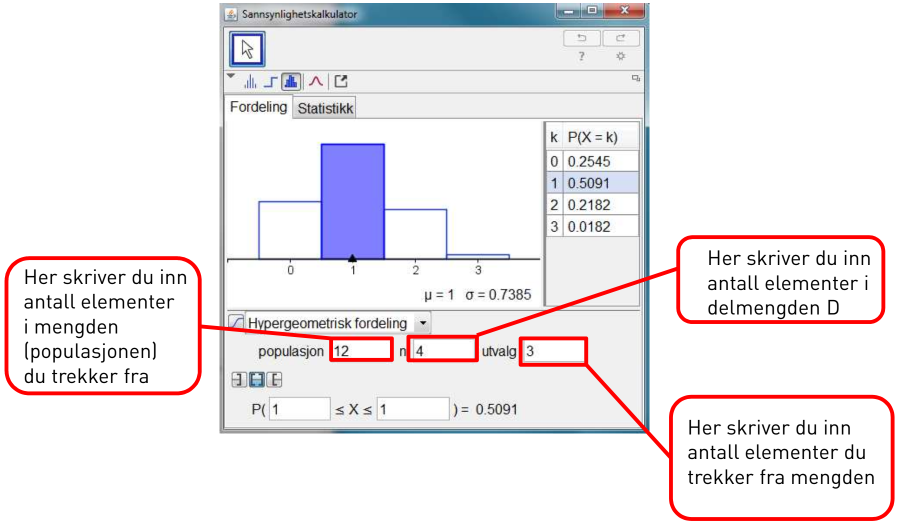
$$= \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{20\cdot 4}{210} = 0.381$$

b.iii)

$$P(2 \text{ røde kuler og 2 blå kuler}) = P(X=2)$$

$$= \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{15\cdot 6}{210} = 0.429$$

Vi kan bruke sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra til å bestemme *P*(*X*=*k*)



Eksempel 7.2:

Når du tipper én lottorekke, krysser du av sju tall fra 1 til 34

Det trekkes tilfeldig ut 7 vinnertall

La *X* være antall riktige vinnertall du tipper

Sannsynlighetsfordelingen blir:

$$P(X=k) = \frac{\binom{7}{k}\cdot\binom{27}{7-k}}{\binom{34}{7}}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=k)$	0.165	0.385	0.315	0.114	0.019	0.0014	0.000035	0.00000019

Binomisk fordeling

Eksempel 7.3: I en søskenflokk er det fire barn

Hva er sannsynligheten for at det er to gutter og to jenter i søskenflokken?

La *X* = «antall gutter i søskenflokken»

Vi vil finne *P*(*X* = 2)

To eldste gutter, to yngste jenter: *GGJJ*

Eldste og yngste gutt, to midterste jenter: *GJJG*

Andre rekkefølger som gir to gutter og to jenter: *GJGJ, JGGJ, JGJG* og *JJGG*

Vi antar at barnas kjønn er uavhengig av hverandre

$$P(GGJJ) = 0.514 \cdot 0.514 \cdot 0.486 \cdot 0.486 = 0.514^2 \cdot 0.486^2$$

$$P(GJJG) = 0.514 \cdot 0.486 \cdot 0.486 \cdot 0.514 = 0.514^2 \cdot 0.486^2$$

Hver av de fire andre rekkefølgene som gir to gutter og to jenter har også sannsynligheten $0.514^2 \cdot 0.486^2$

Vi finner *P*(*X*=2) ved å legge sammen sannsynlighetene for de seks rekkefølgene som gir to gutter og to jenter:

$$P(X=2) = 6 \cdot 0.514^2 \cdot 0.486^2 = 0.374$$

Oppgave 81 Vi kaster en terning fem ganger. At vi får sekser (S) i de to første kastene og fem eller mindre (F) i de tre siste, skriver vi SSFFF. Tilsvarende skriver vi SFFFS hvis vi får sekser i første og siste kast og fem eller mindre i de øvrige kastene.

a) De to rekkefølgene ovenfor gir begge to seksere. Hvilke andre rekkefølger gjør det?

b) Hva er sannsynligheten for rekkefølgen SSFFF?

c) Hva er sannsynligheten for hver av de andre rekkefølgene som gir to seksere?

d) Hva er sannsynligheten for at vi får to seksere?

a) Det er åtte andre rekkefølger som gir to seksere: SFSFF, SFFSF, FSSFF, FSFSF, FSFFS, FFSSF, FFSFS, FFFSS

b)

$$P(SSFFF) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

c) Samme sannsynlighet som i spørsmål b

d)

$$P(\text{to seksere}) = 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.161$$

Vi ser på eksempel 7.3

Der fant vi at det var seks rekkefølger som gir to gutter og to jenter

Det kunne vi funnet ut uten å skrive opp alle rekkefølgene

For å velge en bestemt rekkefølge er det samme som å velge 2 plasser blant 4 der det skal stå *G*

$\boxed{G}\ \boxed{}\ \boxed{G}\ \boxed{}$

Det kan vi gjøre på $\binom{4}{2} = 6$ måter

Generelt har vi følgende situasjon:

- Vi gjør *n* forsøk
  (I eksempel 7.3 er hvert barn et «forsøk»)
- I hvert forsøk er det to muligheter:
  Enten inntreffer en bestemt begivenhet *S*
  ellers så gjør den ikke det
  (I eksempel 7.3 er hvert barn enten en gutt eller en jente)
- I hvert forsøk er sannsynligheten lik *p* for at *S* skal inntreffe
  (I eksempel 7.3 er sannsynligheten for gutt 51.4%)
- Forsøkene er uavhengige
  (I eksempel 7.3 har vi antatt uavhengighet siden vi ser bort fra tvillinger, osv.)

La *X* være antall ganger *S* inntreffer i de *n* forsøkene

Ved å resonnere som i eksempel 7.3 finner vi at *X* har sannsynlighetsfordelingen

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Vi sier at *X* er *binomisk fordelt*

Oppgave 82 (litt endret)
Du kaster 6 kronestykker. La X være antall mynt du får.

a) Skriv opp en formel for sannsynlighetsfordelingen til X.

b) Bruk formelen til å finne sannsynligheten for at du vil få nøyaktig (i) tre mynt; (ii) fire mynt; (iii) fem mynt

a) $P(X = k)$

$$= \binom{6}{k} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^{6-k} = \binom{6}{k} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^6 = \binom{6}{k} \frac{1}{64}$$

b.i)

$$P(\text{tre mynt}) = P(X = 3) = \binom{6}{3} \frac{1}{64} = \frac{20}{64} = 0.313$$

b.ii)

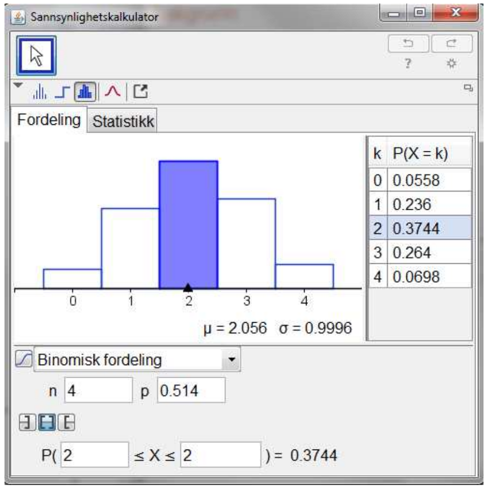
$$P(\text{fire mynt}) = P(X = 4) = \binom{6}{4} \frac{1}{64} = \frac{15}{64} = 0.234$$

b.iii)

$$P(\text{fem mynt}) = P(X = 5) = \binom{6}{5} \frac{1}{64} = \frac{6}{64} = 0.094$$

GeoGebra

Vi kan bruke sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra til å bestemme *P*(*X*=*k*)



Eksempel 7.4. En bestemt type frø spirer med 70% sannsynlighet

Vi sår 20 frø. Hva er sannsynligheten for at nøyaktig 15 frø vil spire?

La X være antall før som spirer

Hvis frøene spirer uavhengig av hverandre, er X binomisk fordelt med n = 20 og p = 0.70

$$P(15 \text{ frø spirer}) = P(X = 15)$$

$$= \binom{20}{15} 0.70^{15}\, 0.30^{5} = 0.179$$