OPPGAVE 3

a) En vanlig kortstokk har 52 kort. Du stokker kortstokken godt og trekker fire kort, det ene etter det andre (uten å legge kortene tilbake i kortstokken).

(i) Hva er sannsynligheten for at du får spar ess, hjerter ess, ruter ess og kløver ess i denne rekkefølgen?

(ii) Hva er sannsynligheten for at du få de fire essene (uansett rekkefølge)?

i) Vi bruker produktsetningen og finner at sannsynligheten blir

$$\frac{1}{52}\cdot\frac{1}{51}\cdot\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{49}=1.54\cdot 10^{-7}$$

ii) Når vi ikke bryr oss om rekkefølgen, gir produktsetningen at sannsynligheten blir

$$\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}\cdot\frac{2}{50}\cdot\frac{1}{49}=3.69\cdot 10^{-6}$$

b) I en klasse er det 12 jenter og 10 gutter. Seks av elevene skal få være med på en tur til London. Læreren bestemmer seg for å velge ut de seks elevene ved loddtrekning. Hva er sannsynligheten for at

(i) tre gutter og tre jenter får bli med på turen

(ii) flere gutter enn jenter får bli med på turen

i) Vi har her en hypergeometrisk situasjon. Vi finner at

$$P(\text{tre gutter})=\frac{\binom{12}{3}\cdot\binom{10}{3}}{\binom{22}{6}}=\frac{220\cdot 120}{74613}=0.354$$

Binomialkoeffisientene kan en enten finne ved å bruke nCr-tasten på en lommeregner, eller ved å bruke tabellen som fulgte med oppgavesettet

ii) Her finner vi at

$$P(\text{flere gutter enn jenter})$$
$$=P(\text{fire, fem eller seks gutter})$$
$$=P(\text{fire gutter})+P(\text{fem gutter})+P(\text{seks gutter})$$
$$\frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{4}}{\binom{22}{6}}+\frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{10}{5}}{\binom{22}{6}}+\frac{\binom{12}{0}\cdot\binom{10}{6}}{\binom{22}{6}}$$
$$=\frac{66\cdot 210}{74613}+\frac{12\cdot 252}{74613}+\frac{1\cdot 210}{74613}=\frac{17094}{74613}=0.229$$

c) Du kaster fem terninger. Hva er sannsynligheten for at du får:

(i) ingen seksere

(ii) én sekser

(iii) minst to seksere

Vi har her en binomisk situasjon

i) $$P(\text{ingen seksere})=\left(\frac{5}{6}\right)^5=0.402$$

ii) $$P(\text{én sekser})=5\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4=0.402$$

iii) $$P(\text{minst to seksere})$$
$$=1-P(\text{ingen seksere})-P(\text{én sekser})$$
$$=1-0.402-0.402=0.196$$

d) Du kaster én terning 300 ganger. La X være antall seksere du får. Bestem $P(40 \le X \le 60)$.

X er binomisk fordelt med $n = 300$ og $p = \frac{1}{6}$

Forventningsverdi:

$$\mu = np = 300 \cdot \frac{1}{6} = 50$$

Standardavvik:

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{300 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 50 = 6.455$$

Standardisert variabel:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-50}{6.455}$$

Vi bruker de Moivres tilnærming for binomisk fordeling:

$$P(40 \le X \le 60)$$
$$= P\left(\frac{40-50}{6.455} \le \frac{X-50}{6.455} \le \frac{60-50}{6.455}\right)$$
$$= P(-1.55 \le Z \le 1.55)$$
$$\approx 0.9394 - 0.0606$$
$$= 0.879$$

OPPGAVE 4

Forsikringsselskapet "Sol og varme" har spesialisert seg på reiseforsikringer for sydenturister. For en ukes sydentur koster reiseforsikringen 400 kroner. Hvis en kunde får stjålet eller mister noen av sine eiendeler, vil "Sol og varme" erstatte tapet. For enkelhets skyld antar vi at de mulige erstatningsbeløpene en kunde kan få er 0 kroner, 1000 kroner, 2500 kroner, 5000 kroner, 10 000 kroner og 50 000 kroner.

La den tilfeldige variabelen X stå for den erstatningen en tilfeldig valgt kunde vil få fra forsikringsselskapet etter en sydentur. Vi antar at X har sannsynlighetsfordelingen gitt i tabellen:

k	0	1 000	2 500	5 000	10 000	50 000
$P(X=k)$	0.900	0.050	0.030	0.015	0.004	0.001

a) Finn forventningsverdien til X. Hvorfor er denne en interessant størrelse for forsikringsselskapet?

$$E(X) = 0 \cdot 0.900 + 1000 \cdot 0.050 + 2500 \cdot 0.030$$
$$+ 5000 \cdot 0.015 + 10000 \cdot 0.004 + 50000 \cdot 0.001 = 290$$

Hvis forsikringsselskapet har mange kunder som tegner en slik reiseforsikring, vil de ved store talls lov i gjennomsnitt få utbetalt omtrent 290 kroner i erstatning

k	0	1 000	2 500	5 000	10 000	50 000
$P(X=k)$	0.900	0.050	0.030	0.015	0.004	0.001

b) Finn variansen og standardavviket til X. Hvilken benevning har disse størrelsene?

$$\mathrm{Var}(X)$$
$$= (0-290)^2 \cdot 0.900 + 1(000-290)^2 \cdot 0.050$$
$$+ (2500-290)^2 \cdot 0.030 + (5000-290)^2 \cdot 0.015 +$$
$$(10000-290)^2 \cdot 0.004 + (50000-290)^2 \cdot 0.001$$
$$= 3428400 \text{ kroner}^2$$

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 1852 \text{ kroner}$$

c) Forklar at selskapets fortjeneste på en forsikring er $Y = 400 - X$ når vi ser bort fra omkostningene. Hva er forventningen og standardavviket til Y?

$$E(Y) = E(400 - X) = 400 - E(X)$$
$$= 400 - 290 = 110 \text{ kroner}$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(400 - X) = (-1)^2 \text{Var}(X)$$
$$= \text{Var}(X) = 3428400 \ \text{ kroner}^2$$

$$\text{SD(Y)} = \sqrt{\text{Var}(Y)} = 1852 \text{ kroner}$$

OPPGAVE 5

Vi har to esker. I eske I er det tre hvite og fem grønne kuler. I eske II er det fem hvite og tre grønne kuler. Du kaster et kronestykke. Hvis du får krone, trekker du tre kuler fra eske I. Hvis du får mynt, trekker du tre kuler fra eske II. Du trakk tre grønne kuler i et slikt forsøk. Hva er sannsynligheten for at du trakk dem fra eske I?

Først bruker vi setningen om total sannsynlighet:

$$P(\text{tre grønne}) = P(\text{eske I}) \cdot P(\text{tre grønne} \mid \text{eske I})$$
$$+ P(\text{eske II}) \cdot P(\text{tre grønne} \mid \text{eske II})$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}$$
$$= \frac{10}{112} + \frac{1}{112} = \frac{11}{112}$$

Så bruker vi Bayes' setning:

$$P(\text{eske I} \mid \text{tre grønne})$$
$$= \frac{P(\text{eske I}) \cdot P(\text{tre grønne} \mid \text{eske I})}{P(\text{tre grønne})}$$
$$= \frac{\frac{10}{112}}{\frac{11}{112}} = \frac{10}{11} = 0.909$$