LØSNING AV OPPGAVENE I SANNSYNLIGHETS-REGNING OG KOMBINATORIKK

OPPGAVE 1

a) Quizlaget kan svare på

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4}_{10 \text{ ganger}} = 4^{10} = 1048576$$

måter

b) Quizlaget kan velge de fire kategoriene på

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

måter

c) $$P(\text{én av hvert kjønn}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{10} = 0.60$$

OPPGAVE 2

Vi ser på hendelsene

T = celleprøven tyder på at kvinnen
har celleforandringer i livmorhalsen

C = kvinnen har celleforandringer i livmorhalsen

Teksten i oppgaven gir at

$$P(T|C) = 0.75 \qquad P(T|\bar{C}) = 0.05$$

$$P(C) = 0.03$$

a) Setningen om total sannsynlighet gir at

$$P(T) = P(C)P(T|C) + P(\bar{C})P(T|\bar{C})$$

$$= 0.03 \cdot 0.75 + 0.97 \cdot 0.05$$

$$= 0.071$$

Sannsynligheten er 7.1% for at testen
tyder på celleforandringer

b) Vi bruker Bayes' setning og

får at

$$P(C \mid T) = \frac{P(C)P(T \mid C)}{P(T)}$$

$$= \frac{0.03 \cdot 0.75}{0.071} = 0.317$$

Hvis celleprøven tyder på celleforandringer, er sannsynligheten 31,7 % for at det virkelig er tilfellet

OPPGAVE 3

a)

P(minst 10 000 kr i erstatning)

$$= P(Y \geq 10\,000)$$

$$= P(Y = 10000) + P(Y = 25000) + P(Y = 50000)$$

$$= 0.025 + 0.013 + 0.002$$

$$= 0.040$$

Det er 4 % sannsynlig at en kunde får en erstatning på minst 10 000 kroner.

b) Forventningsverdien blir

$$E(Y) = 0 \cdot P(Y=0) + 5000 \cdot P(Y=5000)$$

$$+ 10000 \cdot P(Y=10000) + 25000\, P(Y=25000)$$

$$+ 50000 \cdot P(Y=50000)$$

$$= 0 \cdot 0.915 + 5000 \cdot 0.045 + 10000 \cdot 0.025$$

$$+ 25000 \cdot 0.013 + 50000 \cdot 0.002$$

$$= 900$$

Forventet erstatning er 900 kroner

c) Ved store talls lov, vet vi at selskapet i gjennomsnitt vil betale ut omtrent 900 kroner per kunde. Siden forsikringen koster 1000 kroner, vil selskapet i gjennomsnitt tjene omtrent $1000 - 900 = 100$ kroner per kunde.

d) Hver av de $n = 5000$ kundene vil

- enten få utbetalt minst 10 000 kroner, eller så vil de ikke få utbetalt minst 10 000 kroner
- sannsynligheten for at en kunde får utbetalt minst 10 000 kroner er 4% (jf. spørsmål a), og denne sannsynligheten er den samme for alle kundene
- Vi antar at kundene får utbetalt 10 000 kroner eller ikke uavhengig av hverandre

Det følger av dette at X er binomisk fordelt med $n = 5000$ og $p = 0.040$

For å bestemme sannsynlighetene bruker vi de Moivres resultat. Vi minner oss at

$$\mu = np = 5000 \cdot 0.04 = 200$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5000 \cdot 0.04 \cdot 0.96} = 13.86$$

og nu finn den standardiserte variabelen

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 200}{13.86}$$

Vi har da at

$$P(X \leq 190) = P\left(\frac{X-200}{13.86} \leq \frac{190-200}{13.86}\right)$$

$$= P(Z \leq -0.72) = 0.236$$

og

$$P(X \geq 220) = P\left(\frac{X-200}{13.86} \geq \frac{220-200}{13.86}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.44)$$

$$= 1 - 0.925$$

$$= 0.075$$