

## Prøveeksamen i MAT0100V våren 2017

Vedlegg: Formeler for sannsynlighetsregning og kombinatorikk og tabeller over binomialkoeffisienter og standardnormalfordelingen. (Disse vedleggene vil også følge med eksamensoppgavene.)

### OPPGAVE 1

- (a) Vis at halveringslinja til en vinkel er det geometriske stedet for punkter med samme avstand til de to vinkelbeina. (Hint: Trekk normaler fra punktet ned på de to vinkelbeina og vis at disse er kateter i to kongruente trekanter.)
- (b) Vis at halveringslinjene til vinklene i en trekant har et felles punkt. (Hint: Bruk del (a) av oppgaven, eller Ceva og halveringslinjesetningen.)

### OPPGAVE 2

Det geometriske stedet for punktene  $P$  om ligger dobbelt så langt fra punktet  $(3, 0)$  som fra  $y$ -aksen er en hyperbel.

- (a) Finn likningen til hyperbelen.
- (b) Finn symmetrilinjene og asymptotene til hyperbelen.

### OPPGAVE 3

Emil er en ivrig skiskytter. Av erfaring vet Emil at han treffer blinken for 85% av de skuddene han skyter.

- (a) I et renn skyter Emil 20 skudd. La  $X$  være antall ganger han treffer blinken. Hvilke antakelser må du gjøre for at  $X$  skal være binomisk fordelt med  $n = 20$  og  $p = 0.85$ ? Kan du tenke deg noen grunner til at betingelsene ikke er oppfylt?

I resten av oppgaven antar vi at betingelsene for binomisk fordeling er oppfylt.

- (b) Hva er sannsynligheten for at Emil treffer alle de 20 blinkene i et renn? Hva er sannsynligheten for at Emil treffer minst 18 av de 20 blinkene?

I løpet av en sesong skyter Emil 500 skudd.

- (c) Hva er sannsynligheten for at Emil treffer på minst 440 av skuddene?

### OPPGAVE 4

Holmenkollstafetten går fra Bislett stadion til Besserud (nær Holmenkollen) og tilbake til Bislett. Stafetten har 15 etapper. Idrettslaget Kjappfotkameratene har 23 utøvere som gjerne vil være med på stafetten.

- (a) På hvor mange måter kan laglederen velge ut de 15 som skal være med på stafettlaget når vi *ikke* tar hensyn til hvilken utøver som skal løpe hver av de 15 etappene?
- (b) På hvor mange måter kan laglederen sette opp stafettlaget når vi *tar hensyn* til hvilken utøver som skal løpe hver av de 15 etappene?

Tenk deg så at laglederen har bestemt seg for hvem av de 15 løperne som skal være med på stafetten, men at hun ikke har bestemt hvilken etappe hver av utøverne skal ha.

- (c) På hvor mange måter kan de 15 utøverne fordeles på etappene?

### OPPGAVE 5

Føllings sykdom er en sjelden arvelig stoffskiftesykdom. Et barn får sykdommen dersom det får en bestemt recessiv genutgave ( $a$ ) fra både mor og far. Barnet får ikke sykdommen hvis det får den dominante genutgaven ( $A$ ) fra minst én av foreldrene.

Vi ser først på et par der både kvinnen og mannen har genotypen  $Aa$ . Ingen av dem lider av Føllings sykdom, men de er bærere av sykdommen og kan føre den videre til sine barn. Et barn paret får, har 50% sannsynlighet for å arve hver av de to genutgavene ( $A$  og  $a$ ) fra mor og fra far. Arven fra de to foreldrene er uavhengig.

- (a) Hva er sannsynligheten for at et barn paret får, vil lide av Føllings sykdom?
- (b) Paret får tre barn. Hva er sannsynligheten for at ingen av dem vil lide av sykdommen?

Vi ser så på et par der mannen er bærer av Føllings sykdom (dvs. har genotypen  $Aa$ ). Kvinnen lider ikke av Føllings sykdom, men vi vet ikke om hun er bærer av sykdommen eller ikke. Sannsynligheten for at hun er bærer er 2%, mens sannsynligheten er 98% for at hun ikke er bærer.

- (c) Paret får tre barn. Hva er sannsynligheten for at ingen av dem vil lide av Føllings sykdom?
- (d) Anta at paret har fått tre barn og at ingen av dem lider av Føllings sykdom. Hva er da sannsynligheten for at kvinnen er bærer av sykdommen?

SLUTT

## FORMLER I SANNSYNLIGHET OG KOMBINATORIKK

**Addisjonssetningen:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Sannsynligheten for komplementære hendelse:**

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

**Betinget sannsynlighet:**

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

**Produktsetningen:**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

**Total sannsynlighet:**

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

**Bayes' setning:**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}$$

**Ordnete utvalg uten tilbakelegging:**

$${}_n P_r \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)$$

**Fakultet:**

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

**Uordnete utvalg uten tilbakelegging:**

$${}_n C_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdots (r-1) \cdot r}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n C_r$$

**Forventningsverdi:**

$$\mu = E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \cdots + x_m P(X = x_m)$$

$$E(a + bX) = a + bE(X)$$

**Varians og standardavvik:**

$$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 P(X = x_1) + \dots + (x_m - \mu)^2 P(X = x_m)$$

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

$$\text{Var}(a + bX) = b^2 \text{Var}(X)$$

**Hypergeometrisk fordeling:**

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

**Binomisk fordeling:**

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

**De Moivres tilnærming for binomisk fordeling:**

$$P(X \leq k) = P\left(Z \leq \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

**95% konfidensintervall for binomisk  $p$ :**

$$\left[ \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] \quad \text{der } \hat{p} = X/n$$

Tabellen gir binomialkoeffisientene  $\binom{n}{r}$  for ulike verdier av  $n$  og  $r$ .

	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n = 3$	3	1									
4	6	4	1								
5	10	10	5	1							
6	15	20	15	6	1						
7	21	35	35	21	7	1					
8	28	56	70	56	28	8	1				
9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1
13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13
14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188
18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564
19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388
20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970
21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930	352716	352716	293930
22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770	497420	646646	705432	646646
23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314	817190	1144066	1352078	1352078
24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471	1307504	1961256	2496144	2704156
25	300	2300	12650	53130	177100	480700	1081575	2042975	3268760	4457400	5200300

	$r = 13$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$n = 13$	1											
14	14	1										
15	105	15	1									
16	560	120	16	1								
17	2380	680	136	17	1							
18	8568	3060	816	153	18	1						
19	27132	11628	3876	969	171	19	1					
20	77520	38760	15504	4845	1140	190	20	1				
21	203490	116280	54264	20349	5985	1330	210	21	1			
22	497420	319770	170544	74613	26334	7315	1540	231	22	1		
23	1144066	817190	490314	245157	100947	33649	8855	1771	253	23	1	
24	2496144	1961256	1307504	735471	346104	134596	42504	10626	2024	276	24	1
25	5200300	4457400	3268760	2042975	1081575	480700	177100	53130	12650	2300	300	25

**Tabellen gir arealet under standardnormalfordelings-  
funksjonen til venstre for  $z$  for negative  $z$ -verdier**

$z$	Siste desimal i $z$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

**Tabellen gir arealet under standardnormalfordelings-  
funksjonen til venstre for  $z$  for positive  $z$ -verdier**

$z$	Siste desimal i $z$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000