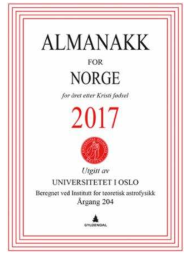
MAT0100V
Sannsynlighetsregning og kombinatorikk

Grunnleggende sannsynlighetsregning

Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

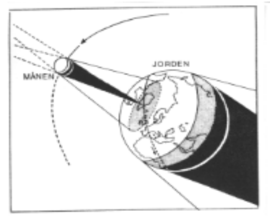
Deterministiske fenomener



Almanakk for Norge viser:
- når det er fullmåne
- når det er soloppgang og solnedgang

Det er mulig siden astronomene kan gi en matematisk beskrivelse av himmellegemenes bevegelser

De kan også regne ut når vi vil få solformørkelse



Fra Store Norske Leksikon

Fullmåne, soloppgang/nedgang og solformørkelse kan forutsies.
De er *determinstiske* fenomener

Tilfeldige forsøk

Vi vet ikke hva resultatet vil bli:
- når vi kaster en terning
- i neste ukes lottotrekning

Terningkast og lottotrekning er eksempler på *tilfeldige forsøk*

Det er også et tilfeldig forsøk å se hvilket kjønn et nyfødt barn har

Kjennetegnet på et tilfeldig forsøk er at vi *ikke* kan forutsi resultatet

Litt historikk

Menneskene har hatt terninger i tusenvis av år:
- Astragalus: lagd av en liten knokkel fra foten til en sau eller hund
- Sekssidet terning lagd for eksempel av bein, stein eller bronse

(www.historicgames.com)

(www.gambletribune.org)

Terningkast og loddtrekning ble brukt for å komme fram til riktig avgjørelse på et vanskelig problem. Avgjørelsen ble da overlatt til høyere makter

Apg. 1, 23-26:

To menn ble kalt fram, Josef Barsabbas med tilnavnet Justus, og Mattias. Så bad de: «Herre, du som kjenner alles hjerter, vis oss hvem av disse to du har utvalgt til å ha den tjeneste og det apostelembete som Judas forlot for å gå til sitt sted.» De kastet lodd mellom dem, og loddet falt på Mattias. Fra nå av ble han regnet som apostel sammen med de elleve.

Torstein Frode sier at det var en bygd på Hisingen som snart hadde fulgt med Norge og snart med Gøtaland. Nå avtalte kongene med hverandre at de skulle kaste lodd om hvem som skulle eie den; de skulle kaste terninger, og den som fikk størst, skulle ha den. Sveakongen kastet to seksere, og så sa han at kong Olav trengte ikke kaste. Han ristet terningene i hånden og sa: «Det er to seksere på terningen ennå, og det er ingen sak for Gud min herre å la dem komme opp.» Han kastet, og det kom opp to seksere. Så kastet Olav sveakonge, og det ble to seksere igjen. Så kastet Olav Norges konge, og da kom det opp seks på den ene, men den andre gikk i stykker, så det kom opp sju på den. Da fikk han bygda. Vi har ikke hørt noe annet å fortelle fra dette møtet. Kongene skiltes som forlikte.

Kongene kaster terninger om en bygd på Hisingen.

(Snorre: Olav den Helliges saga)

Blaise Pascal (1623-1662)

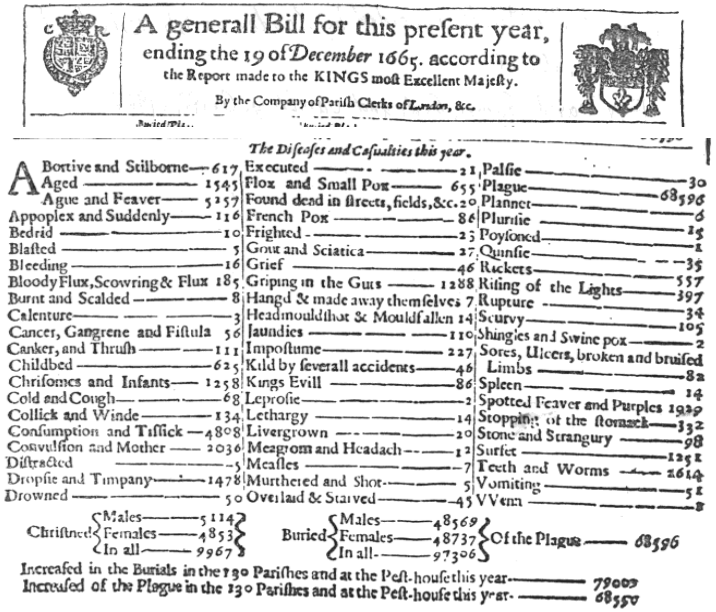
Det historiske gjennombruddet for sannsynlighetsregningen kom først i 1654 i en brevveksling mellom Pascal og Fermat om noen problemer knyttet til spill

Pierre de Fermat (1601-1665)

(Bilder fra www.york.ac.uk/depts/maths/histstat)

Pascal og Fermat var særlig interessert i delingsproblemet («problem of points»): To spillere legger 50 kr hver i en pott. Spillerne kaster ett kronestykke flere ganger. Hvis det blir krone får spiller A ett poeng, hvis det blir mynt får spiller B ett poeng. Førstemann til 10 poeng vinner hele potten. Spillet må imidlertid avbrytes når spiller A har fått 8 poeng og spiller B har fått 7 poeng. Hvordan skal de dele potten?

Etter hvert rettet interessen seg også mot andre områder enn spill. Blant annet ble livsforsikring vanligere blant de velstående på 1700-tallet. Og da måtte en kunne beregne overlevelses-sannsynligheter med utgangspunkt i empiriske data



A generall Bill for this present year, ending the 19 of December 1665. according to the Report made to the KINGS most Excellent Majesty.

By the Company of Parish Clerks of London, &c.

The Diseases and Casualties this year.

Abortive and Stilborne	617	Executed	21	Palsie	30
Aged	1545	Flox and Small Pox	655	Plague	68596
Ague and Feaver	5257	Found dead in streets, fields, &c.	20	Plannet	6
Appoplex and Suddenly	116	French Pox	86	Plurisie	15
Bedrid	10	Frighted	23	Poysoned	1
Blasted	5	Gout and Sciatica	27	Quinsie	35
Bleeding	16	Grief	46	Rickets	557
Bloody Flux, Scowring & Flux	185	Griping in the Guts	1288	Rising of the Lights	397
Burnt and Scalded	8	Hangd & made away themselves	7	Rupture	34
Calenture	3	Headmouldshot & Mouldfallen	14	Scurvy	105
Cancer, Gangrene and Fistula	56	Jaundies	110	Shingles and Swine pox	2
Canker, and Thrush	111	Impostume	227	Sores, Ulcers, broken and bruised Limbs	82
Childbed	625	Kild by severall accidents	46	Spleen	14
Chrisomes and Infants	1258	Kings Evill	86	Spotted Feaver and Purples	1929
Cold and Cough	68	Leprosie	2	Stopping of the stomack	332
Collick and Winde	134	Lethargy	14	Stone and Strangury	98
Consumption and Tissick	4808	Livergrown	20	Surfet	1251
Convulsion and Mother	2036	Meagrom and Headach	12	Teeth and Worms	2614
Distracted	5	Measles	7	Vomiting	51
Dropsie and Timpany	1478	Murthered and Shot	5	VVenn	8
Drowned	50	Overlaid & Starved	45		

Christned: Males 5114, Females 4853, In all 9967

Buried: Males 48569, Females 48737, In all 97306. Of the Plague 68596

Increased in the Burials in the 130 Parishes and at the Pest-house this year 79009

Increased of the Plague in the 130 Parishes and at the Pest-house this year 68590

(www.york.ac.uk/depts/maths/histstat)

I dag brukes sannsynlighetsregning og statistiske modeller og metoder for tilfeldige forsøk på en rekke områder

For eksempel innen:

- Forsikring og finans
- Medisin og genetikk
- Signal- og bildebehandling
- Analyse av kundedatabaser
- Web-applikasjoner (Google, Facebook)
- «Big Data»

Utfall og utfallsrom

Når vi kaster én terning vet vi *ikke* hvor mange øyne vi vil få. Men vi vet at antall øyne vil bli 1, 2, 3, 4, 5 eller 6

Generelt er resultatet av et tilfeldig forsøk *ikke* gitt på forhånd. Men vi kan angi de mulige resultatene, eller *utfallene* for forsøket

Mengden av alle utfall kaller vi *utfallsrommet* U

For terningkast er $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Eksempel 2.1: Observer kjønnet til et nyfødt barn
  $U = \{G, J\}$
- Eksempel 2.2: Antall barn i et svangerskap
  $U = \{$ett barn, tvillinger, trillinger$\}$
- Eksempel 2.3: Meningsmåling
  $U = \{$Rødt, SV, Ap, Sp, KrF, V, H, Frp, MDG, Andre$\}$
- Eksempel 2.4: Kast én terning til første sekser
  $U = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots. \}$

I alle eksemplene ovenfor er utfallsrommet *diskret*
(dvs. endelig eller tellbart uendelig)

I sannsynlighetsregningen er en også opptatt av situasjoner der en har *kontinuerlig* utfallsrom
(dvs. utfallsrommet er et intervall)

Eksempel på kontinuerlig utfallsrom:
Register *vekten* til en nyfødt jente

Vi vil *ikke* se på kontinuerlige utfallsrom i dette kurset

Hendelser

Vi vil ofte være interessert i et resultat av et forsøk som svarer til flere utfall

Ved terningkast kan vi for eksempel være interessert i om vi får *minst* fem øyne

Et resultat av et forsøk som svarer til ett eller flere utfall kaller vi en *hendelse*

Hendelsen A = «minst fem øyne» kan vi skrive
$A = \{5, 6\}$

- Eksempel 2.5: Antall barn i et svangerskap

  F = «flerfødsel» = {tvillinger, trillinger}

- Eksempel 2.6: Meningsmåling

  R = «rød-grønt» = {Ap , SV, Sp}

- Eksempel 2.7: Kast én terning til første sekser

  A = «høyst tre kast» = {1, 2, 3}

  B = «minst fem kast» = {5, 6, 7, ……. }

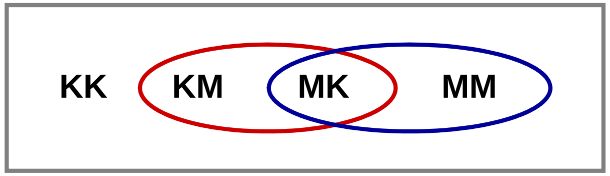
Eksempel 2.8: Kast ett kronestykke og én femkrone

La for eksempel KM bety krone på kronestykket og mynt på femkronen

Utfallsrom U = {KK, KM, MK, MM}

A = «én mynt og én krone» = {KM, MK}

B = «mynt på kronestykket» = {MK, MM}



Eksempel 2.9: Kast én hvit og én rød terning

La for eksempel (4,3) bety firer på den hvite terningen og treer på den røde

Det er 36 utfall:

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

A = «sum sju»

Det klassiske sannsynlighetsbegrepet

De første arbeidene om sannsynlighet var om problemer i spill, og sannsynlighetsbegrepet de brukte var tilpasset dette

Et enkelt eksempel illustrerer tankegangen

Vi kaster én terning

Hva er sannsynligheten for at antall øyne er et oddetall?

Alle sidene på terningen har *samme sannsynlighet* for å vende opp når terningen kastes

Sannsynligheten er lik 1 (eller 100%) for at en eller annen side vil vende opp

Derfor er sannsynligheten 1/6 for hver av de seks utfallene 1, 2, 3, 4, 5 og 6

Hendelsen «odde antall øyne» består av de tre utfallene 1, 3 og 5

Sannsynligheten for odde antall øyne er derfor 3/6 = 1/2

Generell formulering av argumentet:

Et tilfeldig forsøk har *m* utfall
Det er de *mulige utfallene* for forsøket

Vi antar at de *m* utfallene er *like sannsynlige*

Da har hvert utfall sannsynlighet 1/*m*

En hendelse *A* består av *g* utfall
Det er de *gunstige utfallene* for hendelsen *A*

Sannsynligheten for hendelsen *A* er

$$\boxed{P(A) = \frac{g}{m}}$$

Eksempel 2.10: Kast ett kronestykke og én femkrone

Hva er sannsynligheten for å få én mynt ?

Det er *m* = 4 mulige utfall

Av disse er *g* = 2 gunstige for «én mynt»

Sannsynligheten er 2/4 = 1/2 for å få én mynt

KK **KM** **MK** **MM**

Eksempel 2.11: Kast én hvit og én rød terning

Hva er sannsynligheten for at summen av antall øyne blir sju?

Det er *m* = 36 mulige utfall

Av disse er *g* = 6 gunstige for «sum sju øyne»

P(sum sju øyne) = 6/36 = 1/6

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

Sannsynlighet og relativ frekvens

Hva betyr det at sannsynligheten er 1/6 for å få sekser når vi kaster én terning?

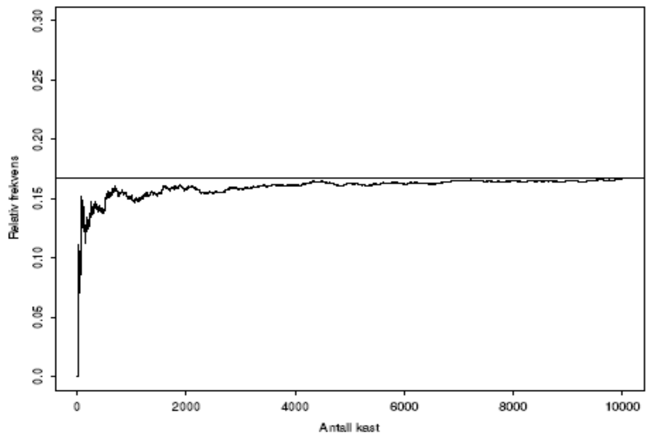
Vi kan ikke forutsi resultatet av ett kast, men vi ser et mønster når terningen kastes mange ganger

Kaster først én terning 10 ganger:

Relativ frekvens av seksere er 1/10 = 0.10

Kaster så én terning om og om igjen. Etter N kast er den relative frekvensen av seksere:

$$r_N(6) = \frac{\text{antall seksere i } N \text{ kast}}{N}$$



Merk at den relative frekvensen nærmer seg 1/6=0.167 når N blir stor

Hva er sannsynligheten for at et nyfødt barn er en jente?

År	Fødte (årsgjennomsnitt)			Relativ frekvens
	I alt	Gutter	Jenter	Jenter
1951-1955	62478	32182	30296	0,485
1956-1960	63021	32374	30647	0,486
1961-1965	63989	32992	30997	0,484
1966-1970	66697	34368	32329	0,485
1971-1975	61393	31487	29906	0,487
1976-1980	51744	26619	25125	0,486
1981-1985	50660	26030	24629	0,486
1986-1990	56862	29154	27708	0,487
1991-1995	60196	30993	29202	0,485
1996-2000	59522	30598	29043	0,488
2001-2005	56459	28925	27534	0,488
2006-2010	60150	30885	29265	0,487

(Modifisert fra www.ssb.no/aarbok/)

Den relative frekvensen av jentefødsler varierer lite fra femårsperiode til femårsperiode

I perioden 1951-2010 ble det født 3566440 barn i Norge. Av dem var 1733405 jenter

Relativ frekvens av jenter i hele perioden er 48.6%

Den relative frekvensen av seksere er omtrent 1/6 når vi kaster én terning mange ganger

Den relative frekvensen av jenter blant alle nyfødte er omtrent 48.6% hvert år

Det er to eksempler på et fenomen som observeres gang på gang – et fenomen som er en forutsetning for å forstå hva sannsynlighet er:

Vi er interessert i en hendelse A i et tilfeldig forsøk. Forsøket gjentas under like betingelser. Da vil den relative frekvensen av A nærme seg en grenseverdi når forsøket gjentas mange ganger. Denne grenseverdien er sannsynligheten $P(A)$

Sannsynlighet er relativ frekvens «i det lange løp»

Merk at det er en forutsetning at forsøket gjentas under like betingelser

Et eksempel hvor dette ikke er tilfellet er flerfødsler

År	Fødte	Tvillinger (årsgj.snitt)	Trillinger	Relativ frekvens tvillinger (%)	Relativ frekvens trillinger (%)
1951-1955	62478	787	9	1.3	0.015
1956-1960	63021	731	7	1.2	0.011
1961-1965	63989	700	8	1.1	0.013
1966-1970	66697	663	7	1.0	0.011
1971-1975	61393	568	4	0.9	0.007
1976-1980	51744	494	4	1.0	0.008
1981-1985	50660	495	8	1.0	0.016
1986-1990	56862	634	19	1.1	0.034
1991-1995	60196	821	24	1.4	0.040
1996-2000	59522	957	24	1.6	0.041
2001-2005	56459	1034	17	1.9	0.031
2006-2010	60150	1021	15	1.7	0.025

Andelen tvilling- og trillingfødsler økte fra midten av 1980 årene på grunn av kunstig befruktning

Sannsynlighet forstått som relativ frekvens i det lange løp kalles enkelte ganger *frekventistisk sannsynlighet*

Merk at denne forståelsen av sannsynlighet forutsetter at forsøket kan gjentas flere ganger

Noen ganger brukes sannsynlighetsbegrepet i situasjoner hvor forsøket ikke kan gjentas

«Det er 70% sannsynlig at Stabæk vil slå Rosenborg neste søndag»

Sannsynlighet som uttrykker en personlig vurdering kalles *subjektiv sannsynlighet*

Sannsynlighetsmodeller

Vi kan ikke bruke grenseverdien av relativ frekvensen som en matematisk definisjon av sannsynlighet

Men på grunnlag av det klassiske sannsynlighets-begrepet og forståelsen av at sannsynlighet kan fortolkes som relativ frekvens i det lange løp, kan vi sette opp noen grunnlegende regler – såkalte *aksiomer* – som sannsynlighet må oppfylle

Vi vil motivere aksiomene ut fra to eksempler

Eksempel 2.12: Kast én terning. Har da at

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$

Merk at:

- sannsynlighetene er tall mellom 0 og 1
- summen av sannsynlighetene er lik 1

Hendelsen A = «odde antall øyne» har sannsynlighet 3/6

Derfor kan vi skrive:

$P(A) = 3/6 = 1/6 + 1/6 + 1/6 = P(1) + P(3) + P(5)$

Merk at:

- sannsynligheten for hendelsen A er summen av sannsynlighetene for de utfallene A består av

Eksempel 2.13: Er interessert i om et svangerskap gir ett barn, tvillinger eller trillinger

I perioden 2006-2010 var det 296562 svangerskap.
291382 av dem ga ett barn, mens det var 5105 tvillingfødsler og 75 trillingfødsler

Relative frekvenser:

r(ett barn) = 0.9825

r(tvillinger) = 0.0172

r(trillinger) = 0.0003

Merk at de relative frekvensene er tall mellom 0 og 1 og at summen av dem er lik 1. Merk også at den relative frekvensen av flerfødsel er lik summen av de relative frekvensene for de utfallene hendelsen består av

Relativ frekvens av flerfødsel:

r(flerfødsel) = 0.0175 = r(tvillinger) + r(trillinger)

Når vi angir sannsynlighetene for *alle* utfallene for et tilfeldig forsøk, sier vi at vi gir en *sannsynlighetsmodell* for forsøket

Eksemplene motiverer følgende aksiomer for en sannsynlighetsmodell:

(i) sannsynligheten for hvert utfall er et tall mellom 0 og 1

(ii) summen av sannsynlighetene for alle utfallene er lik 1

(iii) sannsynligheten for en hendelse er lik summen av sannsynlighetene for de utfallene hendelsen består av

Aksiomene gir bare noen generelle regler som en sannsynlighetsmodell må oppfylle

De sier ingen ting om hvordan sannsynlighetene bør spesifiseres i en konkret situasjon

For å gjøre det må vi ty til symmetriargumenter (typisk: «alle utfall er like sannsynlige») eller fortolkningen av sannsynlighet som relativ frekvens i det lange løp

Hvis alle utfall er like sannsynlige, har vi en *uniform sannsynlighetsmodell*

Det følger av aksiomene at «gunstige delt på mulige» reglen gjelder for uniforme sannsynlighetsmodeller (selvfølgelig!)

Eksempel 2.15: Stortingsvalget i 2013 ga resultatet:

Rødt	SV	Ap	Sp	KrF	V	H	Frp	MDG	Andre
1.1%	4.1%	30.8%	5.5%	5.6%	5.2%	26.8%	16.3%	2.8%	1.8%

Gjør en valgdagsmåling i 2013

Spør en tilfeldig valgt velger hvilket parti hun/han stemte på

Sannsynlighetsmodellen er gitt ved tabellen over

Aksiom (iii) gir

$P(\text{rød-grønt}) = P(\text{SV}) + P(\text{Ap}) + P(\text{Sp}) = 0.404$

Eksempel 2.16: Kast en terning til vi får sekser og register hvor mange kast vi må gjøre

En sannsynlighetsmodell skal gi

$P(k) = P(\text{første sekser i } k\text{-te kast})$

for k = 1, 2, 3,…

Tenk at vi om og om igjen kaster en terning til vi får en sekser. Motivert av at sannsynlighet er relativ frekvens i det lange løp, får vi

$$P(1) = \frac{1}{6} \qquad P(2) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} \qquad P(3) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

Generelt: $$P(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$$

Som alle matematiske modeller av virkelige fenomener er *ikke* en sannsynlighetsmodell riktig eller gal

Men den kan gi en *god* eller *mindre god* beskrivelse av virkeligheten

Brukbar modell for kjønnet til nyfødt barn:

$P(\text{G}) = P(\text{J}) = 0.50$

Men modellen

$P(\text{G}) = 0.514$ og $P(\text{J}) = 0.486$

gir en bedre beskrivelse av virkeligheten

Uniforme sannsynlighetsmodeller

Vi har et tilfeldig forsøk *m* mulige utfall

Alle utfallene er *like sannsynlige*

Vi har en *uniform sannsynlighetsmodell*

En hendelse *A* består av *g* utfall.

Da er $$P(A) = \frac{g}{m}$$

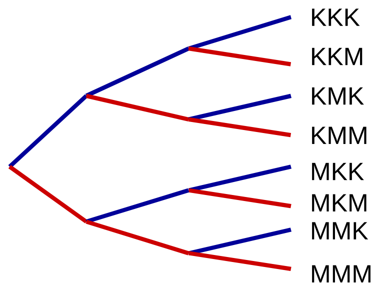
For å finne sannsynligheter for uniforme modeller må vi kunne telle!

Eksempel 3.1: Kast ett kronestykke tre ganger

Dette forsøket er satt sammen av tre delforsøk – ett for hvert kast

Hvor mange utfall har det sammensatte forsøket?

Kan bruke et valgtre for å finne dette (Krone, Mynt)



Det sammensatte forsøket med tre kast med et kronestykke har $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ utfall

Kast med to terninger har $6 \cdot 6 = 36$ utfall

Dette er eksempler på regelen:

I et sammensatt forsøk er antall utfall lik produktet av antall utfall i hvert delforsøk

Eksempel 3.2:

En klasse med 11 jenter og 14 gutter skal velge medlem og varamedlem til elevrådet

Ingen vil stille, så det trekkes lodd

Hva er sannsynligheten for at to gutter blir valgt?

Forsøket er satt sammen av to delforsøk:
valg av medlem og valg av varamedlem

Antall mulige utfall: $m = 25 \cdot 24 = 600$

Antall gunstige utfall: $g = 14 \cdot 13 = 182$

$$P(\text{to gutter blir valgt}) = \frac{182}{600} = 0.303$$

Eksempel 3.3: Trekker fire kort fra en korstokk.

Hva er sannsynligheten for at vi får ett kort i hver farge?

Antall mulige utfall:
$m = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49$

Antall gunstige utfall:
$g = 52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13$

$$P(\text{ett kort i hver farge}) = \frac{52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = 0.105$$

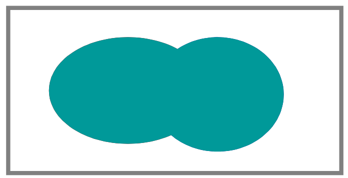
Addisjonssetningen

La *A* og *B* være to hendelser ved et forsøk

Ut fra disse kan vi lage to nye hendelser:

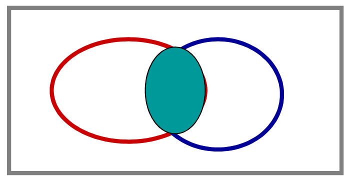
$A \cup B$

omfatter alle utfall som er med i *A* eller i *B* eller i begge («*A* union *B*»)



$A \cap B$

omfatter alle utfall som er med i både *A* og *B* («*A* snitt *B*»)



Eksempel 3.4: Kast én terning

Se på hendelsene:

A = «antall øyne er et partall» = {2, 4, 6}

B = «høyst to øyne» = {1, 2}

1	3	5
2	4	6

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

Merk at: $P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Generelt:

I summen $P(A) + P(B)$ får vi med sannsynlig-hetene for alle utfallene som er med i A eller i B eller i begge, men de som er i $A \cap B$ kommer med to ganger

Derfor: $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$

Det gir *addisjonssetningen:*

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Eksempel 3.5: Kast to terninger

A = «sum øyne lik sju»

B = «minst én sekser»

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

$$P(B) = \frac{11}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

$$P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{15}{36}$$

Eksempel 3.6: I en klasse er det 25 elever

10 elever har fransk (F), 12 elever har tysk (T) og 4 elever har begge fagene

Én elev trekkes tilfeldig

Hva er sannsynligheten for at eleven har minst ett av fagene?

$P(F) = \frac{10}{25}$ $\quad P(T) = \frac{12}{25}$ $\quad P(F \cap T) = \frac{4}{25}$

Addisjonssetningen gir

$$P(F \cup T) = \frac{10}{25} + \frac{12}{25} - \frac{4}{25} = \frac{18}{25}$$

Kast én terning og la A = {5, 6} og B = {1, 4}

Det er ingen utfall i $A \cap B$

$A \cap B$ er en *umulig hendelse*

A og B er *disjunkte* hendelser

Addisjonssetningen for disjunkte hendelser:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Addisjonssetningen gjelder også for flere disjunkte hendelser. For eksempel:

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)}$$

Komplementære hendelser

La A være en hendelser ved et forsøk

Det at A *ikke* inntreffer er en hendelse vi kaller «ikke A» og skriver $\bar{A}$

A og $\bar{A}$ er *komplementære* hendelser

Merk at A og $\bar{A}$ er *disjunkte*

Eksempel 3.7: Kast én terning og la A = {5, 6}
Da er $\bar{A}$ = {1, 2, 3, 4}

I eksemplet er $P(A)$ = 2/6 og $P(\bar{A})$ = 4/6

Merk at summen er lik én

Det kommer av at alle utfall enten er med i A eller i $\bar{A}$ og at summen av alle sannsyniligheten er lik én

Har derfor generelt at

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 1}$$

Eksempel 3.8: Trekker fire kort fra en kortstokk.

Hva er sannsynligheten for at vi får *minst* to kort i samme farge?

Vi kan få minst to kort i samme farge på flere måter

Tungvint å regne ut sannsynlighetene for alle disse og så summere

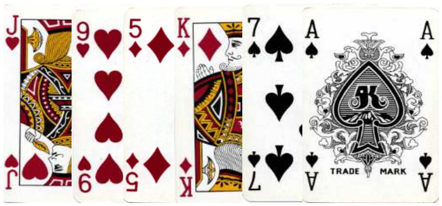
Enklere å gå veien om den komplementære hendelsen:

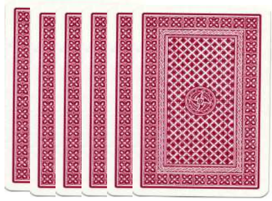
$$P(\text{minst to kort i samme farge})$$
$$= 1 - P(\text{ett kort i hver farge})$$
$$= 1 - 0.105 = 0.895$$

Betinget sannsynlighet

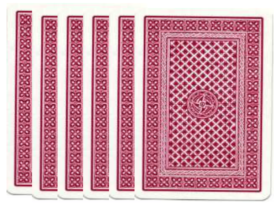
Vil først se intuitivt på betinget sannsynlighet

Eksempel 4.1: Legger fire røde kort og to svarte kort i en bunke





Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til



Ser på hendelsene:

A = «første kort rødt» *B* = «andre kort svart»

Vi har at $P(A) = 4/6 = 2/3$

Hvis *A* har inntruffet er sannsynligheten for *B* lik 2/5

Dette er den *betingede sannsynligheten* for *B* gitt *A*

Den betingede sannsynligheten for *B* gitt *A* skriver vi $P(B\,|\,A)$

Altså har vi at $P(B\,|\,A) = 2/5$

Tilsvarende har vi at $P(B\,|\,\bar{A}) = 1/5$

Om *A* inntreffer eller ikke *endrer* den betingede sannsynligheten for *B*

Vi sier at *A* og *B* er *avhengige* hendelser

Eksempel 4.2:
Bunke med fire røde og to svarte kort

Trekker først ett kort tilfeldig. Legger så kortet tilbake og trekker tilfeldig et kort til

A = «første kort rødt» *B* = «andre kort svart»

Siden vi legger det første kortet tilbake er
$P(B\,|\,A) = P(B\,|\,\bar{A}) = 2/6 = 1/3$

Om *A* inntreffer eller ikke endrer *ikke* den betingede sannsynligheten for *B*

Vi sier at *A* og *B* er *uavhengige* hendelser

I eksemplene over er det *intuitivt* klart hva betinget sannsynlighet er

Det er ikke alltid like enkelt:

- Hva er den betingede sannsynligheten for at begge kortene er røde gitt at minst ett av dem er rødt?
- Hva er den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?

Vi trenger en definisjon av betinget sannsynlighet!

Eksempel 4.3: Norske barn delt inn etter kjønn og fargeblindhet (i prosent):

	Normal	Fargeblind	Totalt
Gutt	47.3	4.1	51.4
Jente	48.3	0.3	48.6
Totalt	95.6	4.4	100

Registrerer kjønn og fargesyn for tilfeldig valgt barn. Tabellen gir sannsynlighetsmodell

Hendelser: F = «fargeblind» og G = «gutt»

Vi har $P(G) = 0.514$ og $P(F \cap G) = 0.041$

«Opplagt» at $P(F \mid G) = \frac{0.041}{0.514} = \frac{P(F \cap G)}{P(G)}$

Eksemplet motiverer *definisjonen*:

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Ved å bytte om «rollene» til A og B

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Eksempel 4.3 / Oppgave 25:
Vi ser på situasjonen i eksempel 4.3

G = «gutt» J = «jente»

F = «fargeblind» N = «normalt fargesyn»

$$P(F \mid J) = \frac{P(F \cap J)}{P(J)} = \frac{0.003}{0.486} = 0.006$$

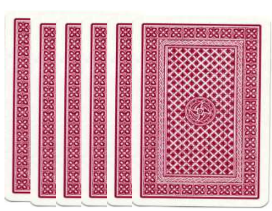
$$P(G \mid F) = \frac{P(F \cap G)}{P(F)} = \frac{0.041}{0.044} = 0.932$$

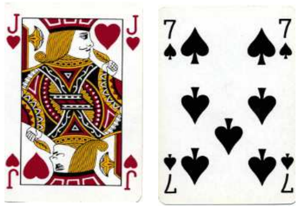
$$P(J \mid N) = \frac{P(J \cap N)}{P(N)} = \frac{0.483}{0.956} = 0.505$$

Eksempel 4.4:

Bunke med fire røde og to svarte kort

Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til





A = «første kort rødt» *B* = «andre kort svart»

Vil bestemme $P(B\,|\,A)$ ut fra definisjonen
(det gir en «sjekk» på at definisjonen er rimelig)

Vi kan trekke to kort på 6 · 5 = 30 måter

Vi kan trekke først et rødt og så et svart kort på
4 · 2 = 8 måter

Vi kan trekke det første kort rødt på 4 · 5 = 20 måter

Det gir

$$P(A\cap B)=\frac{8}{30} \qquad P(A)=\frac{20}{30}$$

Dermed er

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{8/30}{20/30}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

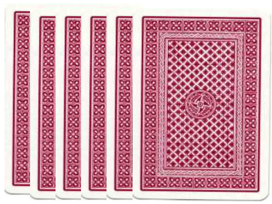
(selvfølgelig!)

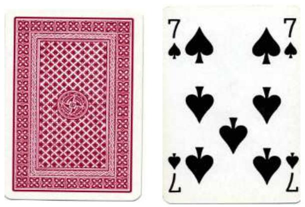
Eksempel 4.5:

Bunke med fire røde og to svarte kort

Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til

Hva er den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?





A = «første kort rødt» *B* = «andre kort svart»

Vil bestemme $P(A\,|\,B)$

Vi har fra eksempel 4.4 at $P(A\cap B)=\frac{8}{30}$

Vi kan få et svart kort andre gang på to måter:

- først rødt, så svart kort, dvs $A\cap B$
- to svarte kort, dvs $\bar{A}\cap B$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=\frac{4\cdot 2}{6\cdot 5}+\frac{2\cdot 1}{6\cdot 5}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

dvs lik sannsynligheten for at første kort er svart

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{8/30}{10/30}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

Hva betyr det egentlig at den betingede sannsynligheten er 4/5 = 80% for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?

Husk at *sannsynlighet er relativ frekvens i det lange løp*

- At $P(A)$ = 2/3 betyr at det første kortet vil være rødt ca 2/3 av gangene i det lange løp
- At $P(A \mid B) = 4/5$ betyr at *hvis vi bare teller med de gangene der det andre kortet er svart,* så vil det første kortet være rødt ca 4/5 *av disse gangene* i det lange løp