MAT0100V
Sannsynlighetsregning og kombinatorikk

Kombinatorikk
Ordnede utvalg med og uten tilbakelegging
Uordnede utvalg uten tilbakelegging
Pascals talltrekant og binomialkoeffisientene

Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Kombinatorikk

For å bruke en uniform sannsynlighetsmodell må vi finne antall mulige og antall gunstig utfall

I enkle situasjoner som kast med to terninger kan vi skrive opp alle mulige utfall og alle utfall som er gunstige for den hendelsen vi er interessert i

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

"Sum sju øyne"

I Lotto er det over 5 millioner mulige vinnerrekker

Vi må være veldig tålmodige for å skrive opp alle disse!

Vi må derfor kunne beregne antall mulige vinnerrekker uten å skrive dem opp

Kombinatorikk er navnet på den delen av matematikken som gir oss løsningen på dette og liknende problemer

Multiplikasjonssetningen

Eksempel 6.1:
På en meny er det:
- 4 forretter
- 10 hovedretter
- 5 desserter

Forretter:

Rekecocktail
Gravet laks
Fiskesuppe
Løksuppe

På hvor mange måter kan vi sette sammen et måltid med én forrett, én hovedrett og én dessert?

Måltidet kan settes sammen på $4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$ måter

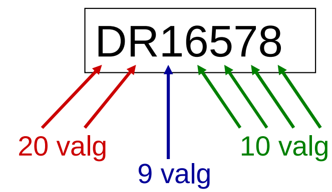
Valget av de tre rettene er en *valgprosess* i tre trinn:

(i) valg av forrett
(ii) valg av hovedrett
(iii) valg av dessert

Generelt har vi *multiplikasjonssetningen:*

> En valgprosess har r trinn.
> I første trinn er det n_1 valgmuligheter,
> i andre trinn er det n_2 valgmuligheter, ...
> i siste trinn er det n_r valgmuligheter.
> Da er det til sammen
>
> $$n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_r$$
>
> valgmuligheter

Eksempel 6.2:
Et bilnummer består av to bokstaver og 5 siffer



Hvor mange bilnummer kan vi lage?

Vi kan lage

$$20 \cdot 20 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 36\,000\,000$$

forskjellige bilnummer

Ulike typer utvalg

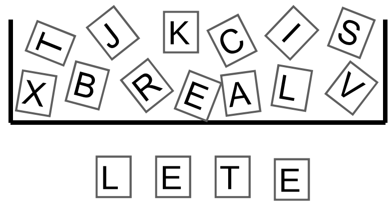
Eksempel 6.3: Vi skriver bokstavene i alfabetet på hver sin lapp og legger de 29 lappene i en eske

Vi trekker så fire lapper, én etter én
Vi sier at vi trekker et *utvalg* på fire bokstaver

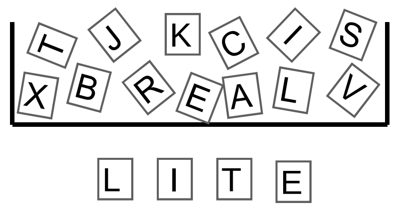
Hvis vi legger en lapp tilbake før vi trekker den neste, trekker vi *med tilbakelegging*
Hvis vi *ikke* legger lappen tilbake, trekker vi *uten tilbakelegging*

Hvis rekkefølgen bokstavene trekkes i har betydning, trekker vi et *ordnet utvalg*
Hvis rekkefølgen *ikke* har betydning, trekker vi et *uordnet utvalg*

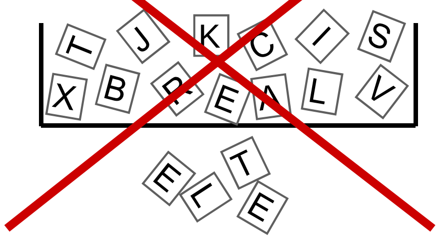
Ordnet utvalg
med tilbakelegging



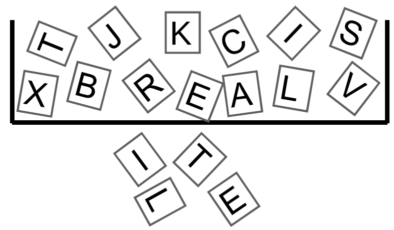
Ordnet utvalg
uten tilbakelegging



~~Uordnet utvalg~~
~~*med* tilbakelegging~~



Uordnet utvalg
uten tilbakelegging



Ordnet utvalg med tilbakelegging

Se på bokstaveksemplet

Hver gang vi trekker er det 29 bokstaver å velge mellom

Vi kan velge de fire bokstavene på

$$29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = 29^4 = 707281$$

forskjellige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen

Generelt har vi en mengde med *n* elementer, og vi velger *r* elementer fra mengden med tilbakelegging

Da kan vi lage $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{r \text{ ganger}} = n^r$ ordnede utvalg

Eksempel 6.4:

På en tippekupong er det gitt 12 kamper

For hver kamp skal en tippe H, U eller B

Hvor mange forskjellige tipperekker kan vi lage?

INNLEVERINGSFRIST: SØNDAG 26.03.2017 KL. 17:55		H	U	B
1	Nord-Irland – Norge	H	U	B
2	San Marino – Tsjekkia	H	U	B
3	Aserbajdsjan – Tyskland	H	U	B
4	Armenia – Kasakhstan	H	U	B
5	Montenegro – Polen	H	U	B
6	Romania – Danmark	H	U	B
7	England – Litauen	H	U	B
8	Malta – Slovakia	H	U	B
9	Skottland – Slovenia	H	U	B
10	Mirandes – Huesca	H	U	B
11	CF Reus Deportiu – Ucam Murcia CF	H	U	B
12	Elche – Real Zaragoza	H	U	B

Vi kan lage

$$3 \cdot 3 \cdots 3 = 3^{12} = 531\,441$$

forskjellige tipperekker

Oppgave 54 I tipping skal en for hver av 12 fotballkamper gjette om det blir hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B). En rekke består av ett tips for hver av de 12 kampene.

a) Når du fyller ut tippekupongen, kan du hel- eller halvgardere en kamp ved at du gir mer enn ett tippetegn for denne. Du leverer en tippekupong med tre hel- og to halvgarderinger. Hvor mange rekker har du tippet?

INNLEVERINGSFRIST: SØNDAG 26.03.2017 KL. 17:55		H	U	B
1	Nord-Irland – Norge	H	U	B
2	San Marino – Tsjekkia	H	U	B
3	Aserbajdsjan – Tyskland	H	U	B
4	Armenia – Kasakhstan	H	U	B
5	Montenegro – Polen	H	U	B
6	Romania – Danmark	H	U	B
7	England – Litauen	H	U	B
8	Malta – Slovakia	H	U	B
9	Skottland – Slovenia	H	U	B
10	Mirandes – Huesca	H	U	B
11	CF Reus Deportiu – Ucam Murcia CF	H	U	B
12	Elche – Real Zaragoza	H	U	B

Antall rekker:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$= 2^2 \cdot 3^3$$

$$= 108$$

Ordnet utvalg uten tilbakelegging

Se igjen på bokstaveksemplet

- Første gang er det 29 bokstaver å velge mellom
- Andre gang er det 29-1 bokstaver å velge mellom
- Tredje gang er det 29-2 bokstaver å velge mellom
- Fjerde gang er det 29-3 bokstaver å velge mellom

Vi kan velge de fire bokstavene på

$$29 \cdot (29-1) \cdot (29-2) \cdot (29-3) = 570\,024$$

forskjellige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen

Generelt har vi en mengde med *n* elementer, og vi velger *r* elementer fra mengden uten tilbakelegging

Da kan vi lage

$$ {}_{n}P_{r} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}_{r \text{ faktorer}} $$

ordnede utvalg

Eksempel 6.5:
Landslagstreneren i langrenn for menn har sju løpere å velge mellom til en World Cup stafett over 4x10 km

På hvor mange måter kan han sette opp stafett-laget når vi tar hensyn til hvem som skal gå de ulike etappene?

Treneren kan sette opp stafettlaget på

$$ {}_{7}P_{4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840 $$

måter

Vi har fortsatt en mengde med *n* elementer, og vi velger *r* elementer fra mengden uten tilbakelegging

Når *r* = *n* velger vi alle elementene.

Da svarer et ordnet utvalg til en bestemt rekkefølge (eller permutasjon) av de *n* elementene

Det er

$$ n! = {}_{n}P_{n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n $$

slike rekkefølger

Merk at vi setter $0! = 1$

Eksempel 6.6:

Vi ser på eksempel 6.5. Treneren har bestemt seg for hvilke fire løpere som skal gå stafetten

Hvor mange lagoppstillinger kan han da velge mellom?

Treneren kan velge mellom

$$ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 $$

lagoppstillinger

Oppgave 50 Treneren for en skiklubb kan velge mellom 5 løpere til NM-stafetten for kvinner over 3×5 km.

a) Hvor mange måter kan hun sette opp stafettlaget på? (Du skal ta hensyn til hvem som går hver av de tre etappene.)

b) Anta at hun har bestemt seg for hvilke tre løpere som skal gå stafetten, men ikke hvilke etapper hver av dem skal gå. Hvor mange mulige lagoppstillinger kan hun velge mellom?

a) Antall mulige stafettlag:

$$_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

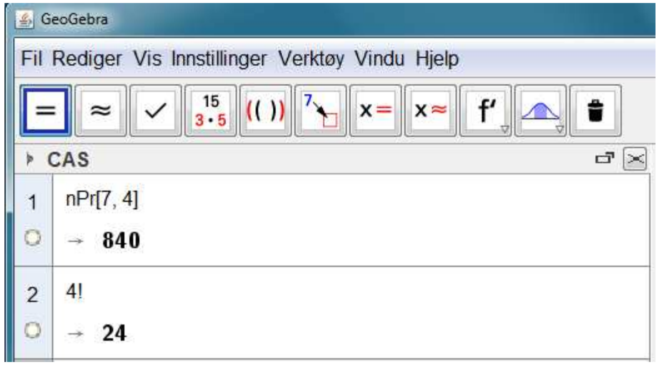
b) Antall mulige lagoppstillinger:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

GeoGebra

Vi kan bruke GeoGebra til å bestemme $_nP_r$ og $n!$

Illustrasjon for $_7P_4$ og $4!$



Uordnet utvalg uten tilbakelegging

Eksempel 6.7: Vi ser igjen på stafetteksempelet

På hvor mange måter kan treneren velge ut de 4 som skal gå stafetten (blant de 7) når vi *ikke* bryr oss om hvem som skal gå de ulike etappene?

La *x* være antall måter han kan gjøre det på

Merk at *x* er antall *uordnede* utvalg av 4 løpere blant 7 når utvelgingen skjer uten tilbakelegging

Vi vil bestemme *x* ved å finne antall *ordnede* utvalg på to måter

Fra eksempel 6.5 har vi at antall ordnede utvalg av 4 løpere blant 7 løpere er $_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Fra ett uordnet utvalg kan lage $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ordnede utvalg (jf eksempel 6.6)

Vi kan derfor lage $x \cdot 4!$ ordnede utvalg

Dermed er $x \cdot 4! = {_7P_4}$

Dette gir $x = \dfrac{_7P_4}{4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$

Treneren kan velge ut de som skal gå stafetten på 35 måter når vi ikke bryr oss om hvem som skal gå de ulike etappene

Generelt har vi en mengde med *n* elementer, og vi velger *r* elementer fra mengden uten tilbakelegging

Da kan vi lage

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots(r-1)\cdot r} $$

uordnede utvalg

NB! For uordnet utvalg spiller det ingen rolle om vi velger ett element om gangen, eller om vi velger alle på en gang

Eksempel 6.8:

En klasse har 25 elever

Fire elever skal velges til en festkomité

Hvor mange måter kan det gjøres på?

De 4 elevene kan velges på

$$ {}_{25}C_4 = \frac{{}_{25}P_4}{4!} = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 12650 $$

måter

Oppgave 55 I en klasse er det 25 elever. De skal velge to medlemmer til elverådet. Hvor mange måter kan de gjøre det på?

Antall måter de to medlemmene kan velges på er:

$$ {}_{25}C_2 = \frac{25\cdot 24}{1\cdot 2} = 300 $$

Oppgave 56 Et lokallag til et politisk parti har 40 medlemmer. Lokallaget skal velge tre delegater til partiets landsmøte. Hvor mange måter kan de velge delegatene på?

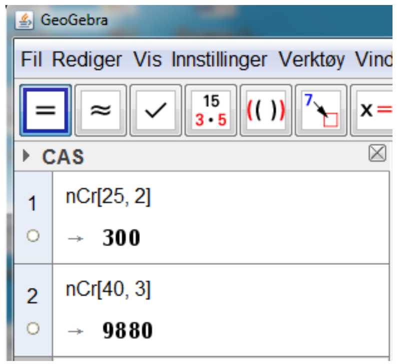
Antall måter de tre delegatene kan velges på er:

$$ {}_{40}C_3 = \frac{40\cdot 39\cdot 38}{1\cdot 2\cdot 3} = 9880 $$

GeoGebra

Vi kan bruke GeoGebra til å bestemme ${}_nC_r$

Illustrasjon for ${}_{25}C_2$ og ${}_{40}C_3$



Eksempel 6.9:

Når du tipper én lottorekke, krysser du av sju tall fra 1 til 34

Hvor mange lottorekker fins det?

Hva er sannsynligheten for å vinne førstepremie hvis du tipper én rekke?

Antall mulige lottorekker:

$$_{34}C_7 = \frac{34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 5\,379\,616$$

Sannsynligheten for å vinne førstepremie:

$$P(\text{førstepremie}) = \frac{1}{5379616} = 0.00000019$$

Illustrasjon av vinnersjansen i Lotto

Jernbanestrekningen fra Stavanger til Bodø er omtrent 1900 km

Tenk deg at det et sted på strekningen er plassert en basketkurv (diameter 45 cm)

Du reiser Stavanger – Bodø og slipper på et tilfeldig valgt sted en klinkekule ut av vinduet

Sannsynligheten for at du treffer kurven er

$$\frac{0.45}{1900\cdot 1000} = 0.00000023$$

Det er omtrent det samme som sannsynligheten for å vinne førstepremie i Lotto

Oppgave 61 I Lotto kan du tippe system ved å krysse av mer enn sju tall på kupongen.

a) Hvor mange rekker tipper du hvis du krysser av ni tall?

b) Hvor mange rekker tipper du hvis du krysser av ti tall?

a) Antall rekker hvis du krysser av ni tall:

$$_{9}C_7 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2} = 36$$

b) Antall rekker hvis du krysser av ti tall:

$$_{10}C_7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$$

Eksempel 6.10:

En pokerspiller får delt ut fem kort

Hva er sannsynligheten for at spilleren bare får hjerter?

Antall mulige måter å dele ut fem kort på:

$$_{52}C_5 = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 2\,598\,960$$

Antall av disse som gir bare hjerter:

$$_{13}C_5 = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 1287$$

$$P(\text{bare hjerter}) = \frac{1287}{2598960} = 0.0005$$

Pascals talltrekant

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

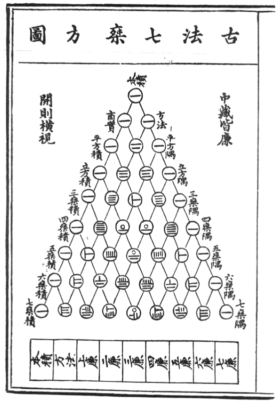
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Talltrekanten kalles Pascals trekant, men den var kjent lenge før Pascal skrev om den

Kinesisk versjon
fra 1300-tallet

(www.york.ac.uk/depts/maths/histstat)



Vi har at:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$= \mathbf{1}\cdot a^2 + \mathbf{2}\cdot ab + \mathbf{1}\cdot b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$= \mathbf{1}\cdot a^3 + \mathbf{3}\cdot a^2b + \mathbf{3}\cdot ab^2 + \mathbf{1}\cdot b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$= \mathbf{1}\cdot a^4 + \mathbf{4}\cdot a^3b + \mathbf{6}\cdot a^2b^2 + \mathbf{4}\cdot ab^3 + \mathbf{1}\cdot b^4$

Generelt finner vi koeffisientene i uttrykket for $(a+b)^n$ i n-te linje i Pascals trekant
(når vi begynner nummereringen med linje 0)

Uttrykket a+b kalles et *binom*

Formelen for å regne ut $(a+b)^n$ kalles *binomialformelen*

Derfor kalles tallene i Pascals trekant for *binomialkoeffisienter*

Vi skriver tall nummer r i linje nummer n i Pascals trekant som $\binom{n}{r}$

(nummereringen starter med linje og plass 0)

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

Binomialkoeffisientene er generelt gitt ved

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Formelen gjelder også for $r = 0$ og $r = n$ siden vi har $0! = 1$

Vi har uten videre at $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Kan vise at $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$

Hva er sammenhengen mellom binomial-koeffisientene de kombinatoriske tallene ${}_nC_r$?

$$
{}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{{}_nP_r \cdot (n-r)!}{r!\,(n-r)!}
$$

$$
= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot(n-r-1)\cdots 2\cdot 1}{r!\,(n-r)!}
$$

$$
= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}
$$

Binomialkoeffisientene og de kombinatoriske tallene er de samme!

Vil bruke skrivemåten for binomialkoeffisientene