MAT0100V
Sannsynlighetsregning og kombinatorikk

Ordnet utvalg med og uten tilbakelegging (repetisjon)

Uordnet utvalg uten tilbakelegging (repetisjon)

Tilfeldige variabler og sannsynlighetsfordelinger

Hypergeometrisk fordeling

Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Ulike typer utvalg

Eksempel 6.3: Vi skriver bokstavene i alfabetet på hver sin lapp og legger de 29 lappene i en eske

Vi trekker så fire lapper, én etter én
Vi sier at vi trekker et *utvalg* på fire bokstaver

Hvis vi legger en lapp tilbake før vi trekker den neste, trekker vi *med tilbakelegging*
Hvis vi *ikke* legger lappen tilbake, trekker vi *uten tilbakelegging*

Hvis rekkefølgen bokstavene trekkes i har betydning, trekker vi et *ordnet utvalg*
Hvis rekkefølgen *ikke* har betydning, trekker vi et *uordnet utvalg*

Ordnet utvalg med tilbakelegging

Vi ser på bokstaveksemplet

Hver gang vi trekker er det 29 bokstaver å velge mellom

Vi kan velge de fire bokstavene på

$$29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = 29^4 = 707281$$

forskjellige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen

Generelt har vi en mengde med *n* elementer, og vi velger *r* elementer fra mengden med tilbakelegging

Da kan vi lage $n \cdot n \cdots n = n^r$ ordnede utvalg

Ordnet utvalg uten tilbakelegging

Vi ser igjen på bokstaveksemplet

- Første gang er det 29 bokstaver å velge mellom
- Andre gang er det 29-1 bokstaver å velge mellom
- Tredje gang er det 29-2 bokstaver å velge mellom
- Fjerde gang er det 29-3 bokstaver å velge mellom

Antall måter vi kan velge de fire bokstavene på er

$$29 \cdot (29-1) \cdot (29-2) \cdot (29-3) = 570\,024$$

Generelt har vi en mengde med *n* elementer, og vi velger *r* elementer fra mengden uten tilbakelegging

Antall ordnede utvalg er

$${}_nP_r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)$$

Oppgave 49 I det norske alfabetet er det 29 bokstaver. Hvor mange "ord" kan du lage som består av a) tre forskjellige bokstaver; b) fire forskjellige bokstaver; c) fem forskjellige bokstaver? (Vi bryr oss ikke om "ordene" gir mening.)

a) Antall «ord» som består av tre ulike bokstaver er

$$_{29}P_3 = 29 \cdot 28 \cdot 27 = 21924$$

b) Antall «ord» som består av fire ulike bokstaver er

$$_{29}P_4 = 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 570\,024$$

c) Antall «ord» som består av fem ulike bokstaver er

$$_{29}P_5 = 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = 14\,250\,600$$

Eksempel 6.14:

I en klasse er det 25 elever

Hva er sannsynligheten for at minst to har samme fødselsdag?

Vi regner først ut sannsynligheten for at ingen har samme fødselsdag

Antall mulige ordnede utvalg: 365^{25}

Antall gunstige ordnede utvalg: $_{365}P_{25}$

$$P(\text{ingen samme fødselsdag}) = \frac{_{365}P_{25}}{365^{25}} = 0.431$$

$$P(\text{minst to samme fødselsdag}) = 1 - 0.431 = 0.569$$

Uordnet utvalg uten tilbakelegging

Eksempel 6.7 (modifisert):

Landslagstreneren i langrenn for menn har sju løpere å velge mellom til en World Cup stafett over 4x10 km

På hvor mange måter kan han ta ut de fire som skal gå stafetten (når vi *ikke* tar hensyn til hvem som skal gå de ulike etappene)?

Antall måter treneren kan ta ut de fire løperne på er

$$_7C_4 = \frac{_7P_4}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

Merk at vi kan skrive

$$_7C_4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \binom{7}{4}$$

Generelt har vi en mengde med *n* elementer, og vi velger *r* elementer fra mengden uten tilbakelegging

Antall uordnede utvalg vi kan lage er

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdots (r-1) \cdot r}$$

Merk at vi kan skrive

$$_nC_r = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) \cdot (n-r) \cdot (n-r-1) \cdots 2 \cdot 1}{r!\ (n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!\ (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Vi vil bruke skrivemåten for binomialkoeffisientene $\binom{n}{r}$

Eksempel 6.8:

En klasse har 25 elever

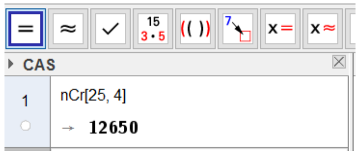
Fire elever skal velges til en festkomité

Hvor mange måter kan det gjøres på?

Antall måter vi kan velge de 4 elevene på er

$$\binom{25}{4} = \frac{25!}{4!\cdot 21!} = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 12650$$

Med GeoGebra:



Eksempel 6.10 (modifisert):

En pokerspiller får delt ut fem kort

Hva er sannsynligheten for at spilleren får fem kort i samme «farge»?

Antall mulige måter å dele ut fem kort på er $\binom{52}{5}$

Antall av disse som gir fem kort i samme farge er

$$\binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} = 5148$$

$$P(\text{samme farge}) = \frac{5148}{2598960} = 0.0020$$

Eksempel 6.11: I en kartong er det 12 sikringer

Fire av dem er defekte, resten er i orden

Vi trekker tilfeldig tre sikringer

Hva er sannsynligheten for at én er defekt?

Antall mulige utvalg $\binom{12}{3} = 220$

Antall gunstige utvalg $\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{2} = 4 \cdot 28 = 112$

$$P(\text{én defekt sikring}) = \frac{112}{220} = 0.509$$

Eksempel 6.12:

I en klasse er det 11 jenter og 14 gutter

Fire elever velges ved loddtrekning til en festkomité

Hva er sannsynligheten for at det blir to jenter og to gutter i komiteen?

Antall mulige utvalg er $\binom{25}{4} = 12650$

Antall gunstige utvalg er $\binom{11}{2} \cdot \binom{14}{2} = 55 \cdot 91 = 5005$

$$P(\text{to jenter og to gutter}) = \frac{5005}{12650} = 0.396$$

Oppgave 68 Se på eksempel 6.12. Hva er sannsynligheten for at det a) bare blir jenter i festkomiteen; b) bare blir gutter i festkomiteen; c) blir én gutt og tre jenter i festkomiteen?

Antall mulige utvalg er $m = \binom{25}{4} = 12\,650$

a) Her er antall gunstige utvalg $g = \binom{11}{4} = 330$

Derfor er:

$$P(\text{bare jenter}) = \frac{g}{m} = \frac{330}{12650} = 0.026$$

b) Tilsvarende finner vi:

$$P(\text{bare gutter}) = \frac{\binom{14}{4}}{\binom{25}{4}} = \frac{1001}{12650} = 0.079$$

c) Her er antall gunstige utvalg

$$g = \binom{14}{1}\binom{11}{3} = 14 \cdot 165 = 2310$$

Det gir at

$$P(\text{én gutt og tre jenter}) = \frac{g}{m} = \frac{2310}{12650} = 0.183$$

Oppgave 70 Ni jenter reiser sammen på sommerferie til syden. På hotellet har de bestilt ett firemannsrom, ett tremannsrom og ett tomannsrom.

a) På hvor mange måter kan jentene velge ut de fire som skal bo på firemannsrommet?

b) Anta at jentene har bestemt seg for hvem som skal bo på firemannsrommet. På hvor mange måter kan de da velge ut de tre som skal bo på tremannsrommet?

c) På hvor mange måter kan jentene fordele seg på de tre rommene?

a) Antall valg for firemannsrommet er $\binom{9}{4} = 126$

b) Antall valg for tremannsrommet er $\binom{5}{3} = 10$

c) Antall måter de kan fordele seg på rommene er

$126 \cdot 10 \cdot 1 = 1260$

Eksempel 6.13:

En pokerspiller får delt ut fem tilfeldig valgte kort

Hva er sannsynligheten for at spilleren får to par?

Antall mulige utvalg: $\binom{52}{5} = 2598960$

Antall gunstige utvalg: $\underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{valg av to verdier}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{valg av to kort i første verdi}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{valg av to kort i andre verdi}} \cdot \underbrace{\binom{44}{1}}_{\text{valg av ett kort i en tredje verdi}} = 123552$

$$P(\text{to par}) = \frac{123552}{2598960} = 0.048$$

Tilfeldige variabler

Når vi kaster to terninger er det 36 utfall

Vi er ofte ikke interessert i de enkelte utfallene

Vi kan for eksempel bare være interessert i
X = «summen av antall øyne»

X er en *tilfeldig variabel*

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

De *mulige verdiene* til X er 2, 3, 4, … , 11, 12

Ved å telle opp antall gunstige utfall for hendelsen «$X = k$» kan vi bestemme $P(X = k)$ for k = 2, 3, … , 12

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

«$X = 7$»

$P(X = 7) = 6/36$

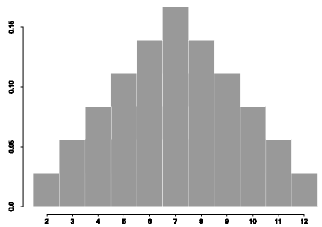
Vi får tabellen:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabellen gir *sannsynlighetsfordelingen* til X

Summen av sannsynlighetene i tabellen er lik én

Vi kan vise sannsynlighets-fordelingen med et stolpediagram



Oppgave 75 Du kaster en femtiøring, et kronestykke og en femkrone og ser hvilke sider de lander på.

a) Skriv opp utfallene for dette forsøket. Hva er sannsynligheten for hvert av utfallene?

b) La X være antall mynt du får. Hvilke verdier kan denne tilfeldige variabelen få? Skriv opp de utfallene som gir hver av disse verdiene.

c) Bestem sannsynlighetsfordelingen til X.

a) Det er åtte mulige utfall:
KKK,KKM, KMK, MKK, MMK, MKM, KMM, MMM
Hvert av utfallene har sannsynlighet 1/8

b) X kan få verdiene 0, 1, 2 og 3
X=0: KKK
X=1: KKM, KMK, MKK
X=2: MMK, MKM, KMM
X=3: MMM

c)

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Oppgave 77 Du kaster to terninger. La Y være det laveste antall øyne du får på en av de to terningene. Hva er de mulige verdiene til Y? Bestem sannsynlighetsfordelingen til Y.

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	$Y = 6$
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	$Y = 5$
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	$Y = 4$
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	$Y = 3$
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	$Y = 2$
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	$Y = 1$

Mulige verdier for Y er 1, 2, 3, 4, 5 og 6

k	1	2	3	4	5	6
$P(Y=k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Hypergeometrisk fordeling

Eksempel 7.1: I en kartong er det 12 sikringer

Fire av dem er defekte, resten er i orden

Vi trekker tilfeldig tre sikringer

X = «antall defekte sikringer vi trekker»

Vi vil finne $P(X = k)$

Antall mulige utvalg $\binom{12}{3}$

Vi kan trekke k defekte på $\binom{4}{k}$ måter

Vi kan trekker 3 – k som er i orden på $\binom{8}{3-k}$ måter

Antall gunstige utvalg for k defekte (og 3 – k som er i orden) er $\binom{4}{k} \cdot \binom{8}{3-k}$

Sannsynlighetsfordelingen til X

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\cdot\binom{8}{3-k}}{\binom{12}{3}}$$

Når vi setter inn k = 0, 1, 2, 3 får vi:

$P(X=0) = 0.255 \qquad P(X=1) = 0.509$

$P(X=2) = 0.218 \qquad P(X=3) = 0.018$

Generelt har vi følgende situasjon:

- Vi har en mengde med N elementer
  (I eksempel 7.1 er dette mengden av de 12 sikringene)
- Elementene i mengden kan deles inn i to delmengder D og $\overline{D}$
  Det er m elementer i D og $N - m$ elementer i $\overline{D}$
  (I eksempel 7.1 er de to delmengdene de defekte og de ikke-defekte sikringene. Det er 4 defekte sikringer og 12 - 4 = 8 som er i orden)
- Vi trekker tilfeldig n elementer fra mengden
  (I eksempel 7.1 trekker vi 3 sikringer)

La X være antall elementer vi trekker fra D

Ved å resonnere som i eksemplet finner vi at X har sannsynlighetsfordelingen

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \cdot \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Vi sier at X er *hypergeometrisk fordelt*

Vi kan bruke sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra til å bestemme $P(X=k)$