Løsningsforslag,
eksamen i MAT 1000, høsten 2005

Oppgave 1.

a) Regner ut den deriverte av f mhp x.

$$f'(x) = \frac{-4}{(1+3e^{-4x})^2} \cdot (-12e^{-4x})$$

hvilket betyr at f vokser på hele definisjonsområdet $[0, \rightarrow\rangle$. Det er ingen steder hvor den deriverte er 0, men den har et minimumspunkt i endepunktet $x = 0$.

b) Vi deriverer en gang til (mye regning!) og får

$$f''(x) = \frac{-192e^{-4x}}{(1+3e^{-4x})^3} \cdot (1 - 3e^{-4x})$$

Setter vi $f'' = 0$ får vi $1 - 3e^{-4x} = 0$, dvs. $x = \frac{1}{4}\ln 3$. Fortegnet til den dobbeltderiverte skifter i dette punktet, fra positiv til negativ, dvs. at vi har et vendepunkt i $x = \frac{1}{4}\ln 3$, grafen krummer opp i intervallet $[0, \frac{1}{4}\ln 3]$ og ned i intervallet $[\frac{1}{4}\ln 3, \rightarrow\rangle$.

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{1+3e^{-4x}} = \frac{1}{1+3} = 1 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{1+3e^{-4x}} = 0$$

Oppgave 2.

a) Vi bruker delvis integrasjon, med $u = \ln t$, $v' = t$. Det gir $u' = \frac{1}{t}$ og $v = \frac{1}{2}t^2$. Dermed får vi

$$\int t \ln t \, dt = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{2}\int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 + C$$

b) Vi har ved produktregelen

$$\frac{d}{dt}(t \ln t - t) = \ln t + t \cdot \frac{1}{t} - 1 = \ln t + 1 - 1 = \ln t$$

Arealet er gitt ved

$$\int_1^e \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^e = e \ln e - e - \ln 1 + 1 = 1$$

c) Vi kan bruke L'Hopitals regel siden grenseverdien er et $\frac{0}{0}$-uttrykkk. Vi deriverer teller og nevner hver for seg og får

$$\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\frac{1}{t}}{1} = 1$$

Oppgave 3.

a)

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Videre har vi

$$\det(AB - BA) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = 0$$

b) Det karakteristiske polynomet til A er gitt ved

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 0$$

Setter vi dette lik 0 får vi egenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. De tilhørende egenvektorene er bestemt av

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X+Y \\ 0 \end{pmatrix} = (0) \end{aligned}$$

eller $X + Y = 0$. Det gir egenvektorer

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tilsvarende for $\lambda_2 = 2$ får vi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} = (0) \end{aligned}$$

som gir $W = 0$ eller

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Vi prøver de to egenvektorene til A,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som er en egenvektor med egenverdi -1. Den andre,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er derimot ikke noen egenvektor for B.