MAT1000 - Høsten 2007

Eksamen 13.12.2007, fasit.

Oppgave 1

a) Siden nevner alltid er positiv, finnes det ingen vertikale asymptoter.
Siden
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
er $y = 0$ en horisontal asymptote, og det er den eneste.

b)
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$
$f'(x) = 0$ for $x = 1$ og $x = -1$. Fortegnsskjema for $f'(x)$ viser at $x = 1$, $f(x) = \frac{1}{2}$ er et maksimumspunkt og $x = -1$, $f(x) = -\frac{1}{2}$ er et minimumspunkt.

c) Bruk av derivasjonsregelen for brøk og riktig bruk av kjerneregelen gir
$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$
som hvis vi forkorter med (x^2+1) og ordner telleren gir
$$f''(x) = -2x\frac{3-x^2}{(x^2+1)^3}.$$
$f''(x)$ har nullpunkter og skifter fortegn for $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ og $x = -\sqrt{3}$.
Dette gir vendepunkter $(0,0)$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ og $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$ ved innsetting.

d) Likningen for vendetangenten er
$$y = f'(0)x.$$
Det vil si at svaret er
$$y = x$$
siden $f'(0) = 1$.

Oppgave 2

$f'(x) = \ln(x+1) + 1$

$f''(x) = \frac{1}{x+1}$

$f'''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1$ og $f'''(0) = -1$

Det gir

$$F_3(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

Oppgave 3

a) Sett $u' = 1$, $u = z$, $v = \ln z$ og $v' = \frac{1}{z}$.
Da gir delvis integrasjon

$$\int \ln z dz = z \ln z - \int z \cdot \frac{1}{z} dz = z \ln z - z + C = z(\ln z - 1) + C.$$

b) $3 \ln t = \ln t^3$ fordi ln "omgjør" et produkt til en sum og dermed en potens til et produkt. t^2 er faktor på begge sider, så

$$3t^2 \ln t = t^2 \ln t^3.$$

Det gir at

$$\int 3t^2 \ln t dt = \int t^2 \ln t^3 dt.$$

Substituerer vi $z = t^3$ får vi fra a) at

$$\int t^2 \ln t^3 dt = \frac{1}{3} \int \ln z dz = \frac{1}{3} z(\ln z - 1) + C = \frac{1}{3} t^3(\ln t^3 - 1) + C.$$

c)

$$\lim_{x \to 0^+} x(\ln x - 1) = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{y} \ln(\frac{1}{y}) = \lim_{y \to \infty} -\frac{\ln(y)}{y} = 0$$

i følge det som er oppgitt.

d) Siden $f(t)$ ikke er definert for $t = 0$ og $\int f(t)dt$ heller ikke er definert for $t = 0$, må vi bruke at

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{x \to x^+} \int_x^1 f(t)dt.$$

Fra b) får vi at

$$\int_x^1 f(t)dt = |_x^1(-10^8 \cdot t^3(\ln t^3 - 1)) = 10^8 + 10^8 \cdot x^3(\ln x^3 - 1).$$

Fra c) ser vi at grensen når $x \to 0^+$ er 10^8.

Oppgave 4

a)

$$M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4y \\ 0,5x + 0,8y \\ 0,5x + 0,5z \end{bmatrix}.$$

Dette uttrykker nøyaktig antall kalver, simler og bukker ett år som funksjon av hvor mange det var året før.

b) Vi finner egenverdiene ved å løse likningen

$$det \begin{bmatrix} -\lambda & 0,4 & 0 \\ 0,5 & 0,8-\lambda & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Regner vi ut determinanten, vil alle ledd untatt to ha 0 som en av faktorene. Vi står igjen med

$$det \begin{bmatrix} -\lambda & 0,4 & 0 \\ 0,5 & 0,8-\lambda & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(0,8-\lambda)(0,5-\lambda) - 0,4 \cdot 0,5 \cdot (0,5-\lambda).$$

$(0,5 - \lambda)$ er felles faktor i de to leddene, så determinanten er 0 når $\lambda = 0,5$. Derfor er dette en egenverdi.
Likningsystemet for å finne egenvektorene vil ha som løsning $x = y = 0$, mens z kan være hva som helst. Egenvektorene er altså alle vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}.$$

Den biologiske tolkningen vil være at om flokken bare består av bukker, vil den fortsette med det, men antallet halveres hvert år.

c) Hvis vi setter den felles faktoren $(0,5-\lambda)$ utenfor i uttrykket for determinanten, får vi

$$(0,5-\lambda)(-\lambda(0,8-\lambda)-0,4\cdot 0,5)=(0,5-\lambda)(\lambda^2-0,8\lambda-0,2).$$

Vi finner de andre egenverdiene ved å løse likningen

$$\lambda^2-0,8\lambda-0,2=0$$

som gir $\lambda=1$ eller $\lambda=-0,2$.
Egenvektorene for $\lambda=1$ er alle vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0,4 \\ 1 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

og egenvektorene for $\lambda=-0,2$ er alle vektorene på formen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1,4 \\ 0,7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Andre fremstillinger av de samme vektormengdene er selvfølgelig mulige.

d) En stabil flokk svarer til egenverdien $\lambda=1$. Hvis det samlede antall voksne dyr er 560, må vi ha 400 simler og 160 bukker. Dette finner vi ved å løse likningen $(1+0,4)t=560$.