Regnefredag MAT1000
prøveeksamen

fredag 23. november 2007

Dette oppgavesettet bør kunne løses på tre timer.
Hvis du ønsker å øve deg på hvordan eksamen kan oppleves, sett deg godt til rette og forsøk å løse dette settet som en prøveeksamen uten hjelp av andre. (Alle skriftlige hjelpemidler og kalkulator er tillatt)

Oppgavesettet deles ut fra kl. 13.00 og blir gjennomgått i Sophus Lies auditorium kl.17.00. Du kan selv velge hvor du vil sitte og jobbe, men det vil til enhver tid være forelesere eller hjelpelærere tilstede i Sophus Lies auditorium for å gi hjelp og svare på spørsmål hvis det trengs.

For hvert delspørsmål er det angitt en maksimal poengsum. Feil svar eller ikke noe svar gir 0 poeng, rett svar med rett utregning gir maks poeng. Maksimal total poengsum er 60 poeng.

oppgave 1

En funksjon f er gitt ved
$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$
når $t \neq 0$ og $f(0) = 1$.

a) Vis at funksjonen er kontinuerlig i $t = 0$, dvs. at
$$\lim_{t \to 0} f(t) = f(0)$$
(4 poeng)

b) Finn et uttrykk for den deriverte av f og vis at
$$\lim_{t \to 0} f'(t) = -\tfrac{1}{2}$$
(7 poeng)

c) Forklar hvorfor funksjonen f avtar i intervallet $\langle 1, \rightarrow \rangle$.
(5 poeng)

oppgave 2

a) Finn det ubestemte integralet

$$\int xe^x \, dx$$

(7 poeng)

b) Regn ut det bestemte integralet

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin x^2 \, dx$$

(9 poeng)

c) Finn arealet av det begrensede området som ligger mellom grafene til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^3$. (6 poeng)

oppgave 3

En dynamisk modell er beskrevet av en matrise M, gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Vi lar

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

og setter

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1400 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til M. (7 poeng)

b) Skriv $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1400 \\ 0 \end{pmatrix}$ som en sum av to egenvektorer for M. (3 poeng)

c) Forholdet $\frac{x_n}{y_n}$ går mot en bestemt verdi når $n \to \infty$. Finn denne verdien. (6 poeng)

oppgave 4

I en populasjonsmodell for kaniner er antall individer gitt ved formelen

$$y(t) = \frac{1000}{100 - 0,01t}$$

Finn vekstraten til populasjonen når $t = 1000$. (6 poeng)