Oppgave 1

a): $f(x) = 0$ når $x^2 - 2x + 2 = 1$, altså når $x = 1$. Vi finner $f'(x) = 2(x-1)(x^2-2x+2)^{-1}$. Siden $x^2 - 2x + 2 > 0$ for alle x, vil fortegnet til $f'(x)$ være bestemt av $x - 1$. Så f vokser når $x > 1$ og avtar når $x < 1$. Funksjonen har derfor et minimumspunkt for $x = 1$, med minimumsverdi $f(1) = 0$.

b): $f''(x) = (2(x^2-2x+2)-4(x-1)^2)(x^2-2x+2)^{-2} = -2x(x-2)(x^2-2x+2)^{-2}$. Det gir at $f''(x) > 0$ for $0 < x < 2$ og $f''(x) < 0$ for $x < 0$ og $x > 2$. Grafen til f krummer oppover for $x \in [0, 2]$ og nedover for $x \in \langle -\infty, 0]$ og $x \in [2, \infty\rangle$. Vendepunktene på grafen er $(0, f(0)) = (0, \ln 2)$ og $(2, f(2)) = (2, \ln 2)$. (Merk at grafen er symmetrisk om linja $x = 1$.)

c): $F_1 = ax + b$ er lineariseringen til $f(x)$. Vi har $b = f(0) = \ln 2$ og $a = f'(0) = -1$. Tangentlinja er gitt ved $y = -x + \ln 2$.

Oppgave 2

Vi kan skrive $f(t) = 2\cos(\frac{2\pi}{12}(t-2))$. For å bestemme konstantene har vi $\omega = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, $a^2 + b^2 = 4$ og $\tan 2\frac{\pi}{6} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} = \frac{b}{a}$. Siden $\frac{\pi}{3}$ er en vinkel i 1. kvadrant, skal vi ha $a, b \geq 0$. Vi setter inn $b = \sqrt{3}\,a$ i $a^2 + b^2 = 4$, og får $a^2 + 3a^2 = 4a^2 = 4$. Det gir $a = 1$, og følgelig $b = \sqrt{3}$. Vi kan derfor skrive

$$f(t) = \cos(\frac{\pi}{6}\,t) + \sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{6}\,t).$$

Oppgave 3

a): Vi skal ha $200 = T(0) = B(3e^0 - 2e^0) = B(3-2) = B$, altså må vi sette $B = 200$.

For $x = 5$ får vi da $T(5) = 200(3e^{-1} - 2e^{-3}) = 200(3 \cdot 0.3679 - 2 \cdot 0.0498) = 200 \cdot 1.0041 \approx 201$.

b): Vi undersøker den deriverte:

$$T'(x) = 200(-\frac{3}{5}\,e^{-\frac{x}{5}} + \frac{6}{5}\,e^{-\frac{3x}{5}}) = 120\,e^{-\frac{3x}{5}}(2 - e^{\frac{2x}{5}}).$$

Vi finner at $T'(x) = 0$ for $x = \frac{5}{2}\ln 2$, og $T'(x)$ skifter fortegn i dette punktet. Altså har funksjonen $T(x)$ nøyaktig ett maksimumspunkt på intervallet $[0, 5]$. Vi kan slutte at det fins én gyteplass i denne delen av elva, og at den ligger $\frac{5}{2}\ln 2 \cdot 1000 \approx 1730$ m fra Roksvoll. Tettheten ved gyteplassen er $T(\frac{5}{2}\ln 2) = 200(3 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot 2^{-\frac{3}{2}}) = 200 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \approx 283$.

c): Antall ørret i den angitte delen av elva kan anslås å være lik det bestemte integralet

$$\int_0^5 T(x)dx = 200\int_0^5 (3e^{-\frac{x}{5}} - 2e^{-\frac{3x}{5}}) = 200\big[-15e^{-\frac{x}{5}} + \frac{10}{3}e^{-\frac{3x}{5}}\big]_0^5$$
$$\approx 200(15 \cdot 0.6321 - \frac{10}{3} \cdot 0.9502) \approx 200 \cdot 6.3144 \approx 1263.$$

Oppgave 4

a): Det karakteristiske polynomet til M er

$$\det(M) = \lambda^2 - 1.6\,\lambda + 0.55 + 0.4\,p.$$

Polynomet har reelle røtter hvis og bare hvis $0.8^2 - (0.55 + 0.4\,p) = 0.09 - 0.4\,p \geq 0$, altså hvis og bare hvis $p \leq 0.225$.

Når $p = 0.104$, er $0.8^2 - (0.55 + 0.4\,p) = 0.0484$ og egenverdiene til M er lik $\lambda_1 = 0.8 + \sqrt{0.0484} = 0.8 + 0.22 = 1.02$ og $\lambda_2 = 0.8 - \sqrt{0.0484} = 0.8 - 0.22 = 0.58$.

b): Vi har

$$M\begin{pmatrix}10\\13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10.2\\13.26\end{pmatrix} = 1.02\begin{pmatrix}10\\13\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}10\\13\end{pmatrix}$$

og

$$M\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2.9\\0.58\end{pmatrix} = 0.58\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}.$$

c): Vi ser at $\binom{15}{14} = \binom{10}{13} + \binom{5}{1}$, så vi får

$$M^n\begin{pmatrix}15\\14\end{pmatrix} = (1.02)^n\begin{pmatrix}10\\13\end{pmatrix} + (0.58)^n\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1.02)^n 10 + (0.58)^n 5\\(1.02)^n 13 + (0.58)^n\end{pmatrix}.$$

d): Vi har

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{10(1.02)^n + 5(0.58)^n}{13(1.02)^n + (0.58)^n} = \frac{10 + 5(\frac{0.58}{1.02})^n}{13 + (\frac{0.58}{1.02})^n}$$

Siden $0 \leq \frac{0.58}{1.02} < 1$, er $\lim_{n\to\infty}(\frac{0.58}{1.02})^n = 0$, så

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{10}{13}$$

Forholdet mellom antall ugler og antall mus går altså mot $\frac{10}{13\,000} = \frac{1}{1300}$.

Vi har

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10(1.02)^{n+1} + 5(0.58)^{n+1}}{10(1.02)^n + 5(0.58)^n} = \frac{1.02 + 0.29(\frac{0.58}{1.02})^n}{1 + 0.5(\frac{0.58}{1.02})^n}$$

Derfor er $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1.02$, og tilsvarende ser vi at vi også får $\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1.02$. Dette svarer til en økning av hver populasjon på 2 prosent per måned.