Fasit til Obligatorisk oppgavesett 2
Våren 2006

Oppgave 1

a): Uttrykket $\ln(9-x^2)$ har mening bare når $x \in \langle -3, 3\rangle$, så største mulige definisjonsmengde er $D_f = \langle -3, 3\rangle$.

Den deriverte er $f'(x) = -2x/(9-x^2)$. For $x \in \langle -3, 0\rangle$, er $f'(x) > 0$, så f er voksende på $\langle 3, 0]$. For $x \in \langle 0, 3\rangle$, er $f'(x) < 0$, så f er avtakende på $[0, 3\rangle$. Det følger at f har et maksimumspunkt for $x = 0$, med maksimumsverdi $f(0) = \ln 9$.

b): $f''(x) = -2(9+x^2)/(9-x^2)^2 < 0$ for alle $x \in D_f$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^+} = -\infty$$

så linjene $x = -3$ og $x = 3$ er vertikale asymptoter.

c): $f(0) = \ln 9$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -\frac{2}{9}$, så

$$F_2(x) = \ln 9 - \tfrac{1}{9}x^2$$

Oppgave 2

a): Velger f.eks. linja gjennom $(3, 9)$ og $(5, 10)$. Det gir ligningen $y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$.

b): $2\ln V = \frac{1}{2} \cdot 5\ln A + \frac{15}{2}$, som gir $\ln V = \frac{5}{4}\ln A + \frac{15}{4}$, og

$$V = e^{\frac{15}{4}} A^{\frac{5}{4}} = cA^r,$$

der $c \approx 42.52$ og $r = 1.25$

Oppgave 3

a): $B(0) = 0$.

$B'(0) = 100(3e^{-\frac{3x}{10}} - e^{-\frac{x}{10}}) > 0$ for $x < 5\ln 3$, $B'(5\ln 3) = 0$ og $B'(x) < 0$ for $x > 5\ln 3$. Befolkningstettheten er størst i avstanden $5\ln 3 \approx 5.5$ km fra sentrum. Tettheten i denne avstanden er $B(5\ln 3) = 2000/3\sqrt{3} \approx 385$.

b): Delvis integrasjon gir ($u = x$, $v' = e^{-\frac{x}{10}} - e^{-\frac{3x}{10}}$)

$$\begin{aligned}
\int x(e^{-\frac{x}{10}} - e^{-\frac{3x}{10}})dx &= \\
& x(-10e^{-\frac{x}{10}} + \tfrac{10}{3}e^{-\frac{3x}{10}}) - \int(-10e^{-\frac{x}{10}} + \tfrac{10}{3}e^{-\frac{3x}{10}})dx \\
&= -10xe^{-\frac{x}{10}} + \tfrac{10}{3}xe^{-\frac{3x}{10}} - 100e^{-\frac{x}{10}} + \tfrac{100}{9}e^{-\frac{3x}{10}} + C \\
&= \tfrac{10}{9}(3x+10)e^{-\frac{3x}{10}} - 10(x+10)e^{-\frac{x}{10}} + C
\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir derfor

$$\int_{10}^{20} 2\pi x B(x)dx = \left[1000 \cdot 2\pi\left(\tfrac{10}{9}(3x+10)e^{-\frac{3x}{10}} - 10(x+10)e^{-\frac{x}{10}}\right)\right]_{10}^{20}$$
$$\approx 2000\pi \cdot 27 \approx 169\,646.$$

Oppgave 4

a): Vi har $C_0 = 400$. Amplituden er $C = \sqrt{(-100)^2 + (173)^2} \approx 200$. Akrofasen t_0 er gitt ved at vinkelen $\frac{\pi}{6}t_0$ ligger i 2. kvadrant og er slik at $\tan(\frac{\pi}{6}t_0) = -\frac{173}{100}$. Siden $\tan^{-1}(-\frac{173}{100}) \approx -\frac{\pi}{3}$, får vi $\frac{\pi}{6}t_0 = -\frac{\pi}{3} + \pi) = \frac{2\pi}{3}$, altså er $t_0 = 4$. Vi kan skrive

$$m(t) = 400 + 200\cos(\tfrac{\pi}{6}(t-4)).$$

Mottaksraten er størst når $t = 4$ (dvs. 01.05.2005), og da er den 600.

b): Vi må finne t slik at $400+200\cos(\frac{\pi}{6}(t-4)) = 500$. Det gir $\cos(\frac{\pi}{6}(t-4)) = \frac{1}{2}$, altså $\frac{\pi}{6}(t-4) = \frac{\pi}{3}$ eller $\frac{\pi}{6}(t-4) = -\frac{\pi}{3}$. Det gir $t_2 = 6$ og $t_1 = 2$.

c): Vi skal bestemme arealet mellom grafen $y = m(t)$ og linja $y = 500$:

$$\int_2^6 m(t)dt - (6-2)500 = \left[400t + 200\tfrac{6}{\pi}\sin(\tfrac{\pi}{6}(t-4))\right]_2^6 - 2000 = \tfrac{1200}{\pi}\sqrt{3} - 400 \approx 262$$