Prøveseksamen, MAT 1001, våren 2009

Oppgave 1

Vi har gitt en andre ordens differensiallikning,

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$$

a) Finn den generelle løsningen til denne differensiallikningen.

b) Finn den spesielle løsningen av denne differensiallikningen som tilfredsstiller initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$.

Oppgave 2

En vekstmodell er gitt ved differensiallikningen

$$y' = \frac{y^2}{t^2} \qquad y > 0$$

a) Finn den generelle løsningen til denne likningen.

b) Vi setter $y(1) = \frac{1}{2}$. Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller denne initialbetingelsen og avgjør hva som skjer med y når $t \to \infty$.

Oppgave 3

En første ordens differensiallikning er gitt ved

$$y' + ay = t$$

hvor vi antar at $y > 0$ og a er en positiv konstant.

a) Finn den spesielle løsningen $y(t)$ av differensiallikningen uttrykt ved konstanten a når vi antar at $y(0) = 0$.

b) Etter hvert som tiden går vil $\frac{y}{t}$ stabilisere seg på en bestemt verdi. Finn denne uttrykt ved a.

Oppgave 4

a) En 3×3-matrise M er gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \alpha \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

hvor α er et reelt tall. For ett bestemt valg av α har M en egenverdi $\lambda = 0$. Hvilken verdi av α er dette?

b) Et inhomogent lineært likningssystem er gitt ved

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2y + \alpha z & = & 1 \\ x - y + z & = & 1 \\ 2x - y + 2z & = & 2 \end{array} \right.$$

hvor α er et reelt tall. Avgjør for hvilke valg av α likningssystemet har løsning og finn denne uttrykt ved α.

SLUTT