Plenumsregning MAT1001

Fredag 02.09.2011

Du bør ha oppgaven foran deg
når du leser løsningen

B.1.5

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

hvor definisjonen av produktet av matriser gir

$$a_{11} = 2\cdot 2 + (-1)(-3) + 1\cdot 1 = 8$$
$$a_{12} = 2(-3) + (-3)\cdot 2 + 1\cdot 3 = -9$$
$$a_{13} = 2\cdot 1 + (-3)\cdot 4 + 1(-1) = -11$$

$$a_{21} = (-1)\cdot 2 + 2(-1) + 4\cdot 1 = 0$$
$$a_{22} = (-1)(-3) + 2\cdot 2 + 4\cdot 3 = 19$$
$$a_{23} = (-1)\cdot 1 + 2\cdot 4 + 4(-1) = 3$$

$$a_{31} = 1\cdot 2 + 3(-1) + (-1)\cdot 1 = -2$$
$$a_{32} = 1(-3) + 3\cdot 2 + (-1)\cdot 3 = 0$$
$$a_{33} = 1\cdot 1 + 3\cdot 4 + (-1)(-1) = 14$$

Det gir

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -11 \\ 0 & 19 & 8 \\ -2 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Som kontroll regner vi ut $\det(A)$ og $\det(A^2)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\left(2(-1) - 4 \cdot 3\right) + 3\left((-1)(-1) - 4 \cdot 1\right)$$

$$+ 1\left((-1) \cdot 3 - 2 \cdot 1\right) = -28 - 9 - 5 = \underline{-42}$$

$$\det(A^2) = \begin{vmatrix} 8 & -9 & -11 \\ 0 & 19 & 8 \\ -2 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 19 & 8 \\ 0 & 14 \end{vmatrix} - (-9)\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} + (-11)\begin{vmatrix} 0 & 19 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8\left(19 \cdot 14 - 8 \cdot 0\right) + 9\left(0 \cdot 14 - 8(-2)\right) - 11\left(0 \cdot 0 - 19(-2)\right)$$

$= 8 \cdot 19 \cdot 14 + 9 \cdot 3 \cdot 2 - 11 \cdot 19 \cdot 2 = 1764$

Ettersom $(-42)^2 = 1764$, tyder denne kontrollen på at vi har regnet riktig.

B.1.6

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & -21 \\ 3 & 7 & a \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} a & -21 \\ 7 & a \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -21 \\ 3 & a \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & a \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + 147) - 2(-a + 63) + 3(-7 - 3a)$$

$$= a^2 + 147 + 2a - 126 - 21 - 9a$$

$$= \underline{\underline{a^2 - 7a}}$$

Dette er determinanten til koeffisient-matrisen til likningsystemet.

Vi har nøyaktig én løsning når determinanten er $\neq 0$.

Det er når $a \neq 0$ og $a \neq 7$

B.1.7

a)

$$\begin{vmatrix} -1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ -a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & 1 \\ -a & a^2 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & 1 \\ -a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(a^2-1) - a(a^3+a) + a(a+a)$$

$$= -a^2+1-a^4-a^2+2a^2 = 1-a^4.$$

Som kontroll ser vi at determinanten er 0 nøyaktig når $a^4=1$, som er når $a=1$ eller $a=-1$. Dette er det samme som når $a^2=1$.

b) I a) beregnet vi determinanten til koeffisientmatrisen til likningssettet.

Når $a \neq 1$ og $a \neq -1$ er determinanten $\neq 0$, og vi har nøyaktig én løsning.

Vi må se nærmere på likningssettet når $a=1$ og når $a=-1$

$$a=1: \quad \begin{aligned} -x+y+z &= -1 \\ x+y+z &= -1 \\ -x+y+z &= -1 \end{aligned}$$

Vi ser at første og siste likning er like. Løser vi de to øverste likningene får vi $y+z=-2$ og $x=0$.

Siden det er minst en løsning og ikke bare nøyaktig én, har vi uendelig mange løsninger

$a=-1$:

$$-x-y-z=-1$$
$$-x+y+z=-1$$
$$x+y+z=-1$$

Legger vi sammen første og siste likning, får vi

$$0=-2$$

som er feil. Det betyr at vi ikke kan ha noen løsning.

B.1.9

Vi regner ut determinanten til koeffisient-matrisen

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ -4 & a & 3 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ a & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -4 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a(2a-3) + (-4-a^2) = 2a^2-3a-4-a^2$$

$$= a^2-3a-4.$$

Vi finner ut når likningsystemet har nøyaktig én løsning ved å løse likningen

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

som har løsninger

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4^2}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Når $a \neq 4$ og $a \neq -1$ har vi nøyaktig én løsning.
Vi må se på de to tilfellene for seg:

$a = 4$:
$$\begin{aligned} 4x \quad\quad + z &= 0 \\ -4x + 4y + 3z &= 4 \\ 4x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Vi setter inn for $z = -4x$ i de to nederste likningene og får

$-4x + 4y - 12x = 4$ dvs $4y - 16x = 4$

$4x + y - 8x = 1$ dvs $y - 4x = 1$

I begge tilfeller får vi $y = 1 - 4x$,

så vi har uendelig mange løsninger

$y = 1 - 4x$
$z = -4x$

$a = -1$:

$$-x + z = 0$$
$$-4x - y + 3z = 4$$
$$-x + y + 2z = 1$$

Løser vi den første likningen $z = x$ og setter inn, får vi

$-4x - y + 3x = 4$ dvs $-x - y = 4$

$-x + y + 2x = 1$ dvs $x + y = 1$

Legger vi sammen likningene, får vi $0 = 3$, som er feil. Vi har altså ingen løsninger.

B.1.10

Vi regner ut determinanten til koeffisientmatrisen

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a - a) - a(a-1) + a(a^2 - a)$$

$$= a - a^2 + a^3 - a^2 = a^3 - 2a^2 + a.$$

Når $a^3 - 2a^2 + a \neq 0$ har vi nøyaktig ēn løsning.

$a^3 - 2a^2 + a = 0$ når $a=0$ eller når

$a^2 - 2a + 1 = 0$, og det er når $a=1$.

Vi ser på likningsystemet for $a=0$ og $a=1$.

$\underline{a=0}$ $\quad x = 0$

$z = 1$

$x + z = 1$

Alle y gir løsning med $x=0$ og $z=1$, så vi har uendelig mange løsninger.

$\underline{a=1}$ $\quad x+y+z = 0$

$x+y+z = 1$

$x+y+z = 1$

De to øverste likningene er uforenlige, så dette likningsettet har ingen løsning.

Svaret på oppgaven blir at likningsettet har mer enn ēn løsning nøyaktig når $a=0$.

B.1.17

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3-3) - 2(-3-6) + a(-1-2)$$

$$= \underline{\underline{18 - 3a}}$$

b) Vi merker oss at determinanten er forskjellig fra 0 når $a \neq 6$, og da har likningsystemet bare ēn løsning for hver verdi av b.

Når $a = 6$, må vi drøfte likningsettet

$$x + 2y + 6z = 2$$
$$-x + y + 3z = 0 \quad (-2)$$
$$2x + y + 3z = b \quad (-2)$$

Vi multipliserer hver av de to nederste likningene med -2 og legger dem til den øverste. Da får vi likningene

$3x = 2$	Summerer vi disse får vi
$-3x = 2 - 2b$	$0 = 4 - 2b$

For $b \neq 2$ kan vi ikke ha noen løsning.

For $b = 2$ får vi løsningene

$$x = \frac{2}{3}, \quad y = y, \quad z = \frac{1}{3}(x-y) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} - y\right)$$

B.1.22

Vi har nøyaktig én løsning når determinanten

$$\begin{vmatrix} (1-t) & 2 \\ 3 & (2-t) \end{vmatrix} \neq 0$$

det vil si når

$$(1-t)(2-t) - 6 \neq 0$$

Vi løser opp parentesene og får

$$t^2 - 3t - 4 \neq 0.$$

Vi har at $t^2 - 3t - 4 = 0$ når

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Så vi nøyaktig én løsning når

$t \neq 4$ og $t \neq -1$.