

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1001 — Matematikk 1
Eksamensdag:	Mandag 12. desember 2011
Tid for eksamen:	09.00–13.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

For hver oppgave er det angitt en maksimal poengskår. Til sammen kan du oppnå 67 poeng. Poengene på dagens eksamen legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseksamen, slik at maksimal samlet poengsum blir 100. Denne summen legges til grunn for karakteren du får på kurset.

OPPGAVE 1 (12 POENG)

Et inhomogent lineært likningssystem er gitt ved

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 2x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

hvor α er et reelt tall. For et bestemt valg av α har likningssystemet uendelig mange løsninger. Finn denne verdien for α og skriv opp alle løsningene av likningssystemet i dette tilfellet.

OPPGAVE 2 (10 POENG)

En funksjon $y = f(x)$ er bestemt av at $f'(x) = x \cdot \ln x$ og $f(1) = 0$. Finn funksjonen.

OPPGAVE 3 (15 POENG)

Et prosjektil blir skutt vertikalt opp fra jordoverflaten med utgangshastighet v_0 . Prosjektilet bremses av luftmotstanden og tyngdekraften slik at farten $v(t)$ til prosjektilet kan beskrives av differensiallikningen

$$v' + kv = -g$$

hvor k er en positiv konstant og g er tyngdens akselerasjon. For enkelthets skyld setter vi i denne oppgaven $k = 0,05$ og $g = 10$. Løs likningen og finn et uttrykk for farten $v(t)$ uttrykt ved v_0 . Ved tidspunktet $t = \tau$ når prosjektilet det høyeste punktet på banen, dvs. at $v(\tau) = 0$. Finn et uttrykk for τ .

(Fortsettes på side 2.)

OPPGAVE 4 (15 POENG)

En 2. ordens differensiallikning er gitt ved

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Finn den spesielle løsningen av differensiallikningen som tilfredsstill initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$.

OPPGAVE 5 (15 POENG)

Torricellis lov sier at vannmengden som renner ut av et hull i bunnen på en tank pr. tidsenhet er proporsjonal med kvadratroten av høyden av vannet i tanken og arealet av hullet. Vi tenker oss en sylindrisk tank med grunnflate A og et hull med areal a . Vi lar $y(t)$ være vannhøyden i tanken ved tiden t . Det gir oss en differensiallikning

$$\frac{d}{dt}(aA \cdot y) = -k\sqrt{y}, \quad k > 0$$

Løs likningen når vi antar at vannhøyden til å begynne med var $y(0) = h$.

SLUTT