MAT 1001, Høsten 2011

Oblig 1

Innleveringsfrist: Torsdag 22. september kl. 1430

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1001). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen.

Denne obligatoriske oppgaven tar for seg en tenkt situasjon, hvor problemstillingen dreier seg om hva studenter drikker i hverdagens (mange) pauser, kaffe, te eller vann. Vi skal stille opp en dynamisk modell som beskriver fordelingen mellom de tre drikkene, og hvordan folk velger innhold i den neste koppen på bakgrunn av hva de drakk forrige gang. Studentene drikker kun en kopp i hver pause.

Dynamikken er som følger: Av de som drikker kaffe, vil 70% velge kaffe også for neste kopp, mens 20% vil velge te. De resterende drikker vann. Av de som drikker te, vil 80% ha te også i den neste koppen mens 10% vil drikke kaffe og de øvrige vann. Av de som foretrakk vann, så vil 20% velge kaffe i neste kopp, 30% vil velge te, og resten holder seg til vann. Vi lar x betegne antall kaffedrikkere, y antall tedrikkere og z antall vanndrikkere. Indeksen indikerer nummeret på pausene, slik at x_1 betegner antall som drakk kaffe i første pause for dagen, z_3 antall som drakk vann i tredje pause, etc. Fordelingen mellom de tre (kaffe-te-vann) i pause nummer n gis ved en søylevektor:

$$P_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Dynamikken i valgene er beskrevet av en overgangsmatrise M gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

dvs. at fordelingen i kopp nummer $n+1$ beregnes ut fra fordelingen i kopp nummer n ved matriseproduktet

$$P_{n+1} = M \cdot P_n$$

a) Matrisa M representerer i dette tilfellet vår modell for dynamikken i valgene. Forklar kort sammenhengen mellom tallene i matrisa og prosentandelene gitt i innledningen.

b) Regn ut kvadratet M^2. Hvs skal vi med denne? Jo, den beskriver hva som skjer med fordelingen mellom drikkene når vi hopper to pauser fram. For å finne ut hva som skjer med fordelingen etter hvert ville vi ha bruk for høyere potenser av M, men den utforskningen skal vi gjør på en annen måte.

c) Finn egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ til M og de tilhørende egenvektorene, v_1, v_2, v_3. I dette eksemplet vil dere få et karakteristisk polynom av grad 3. Selv om

Cardano allerede i 1545 presenterte en generell formel for å løse 3.gradslikninger skal vi forenkle oppgaven litt ved å opplyse om at den ene egenverdien er lik $\lambda_1 = 1$. Den tilhørende egenvektoren er

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dermed har dere oppgitt en av røttene til den karakteristiske likningen og det gjør det adskillig enklere å finne de to andre egenverdiene. Metoden vi benytter til dette kalles polynomdivisjon og den minner veldig om vanlig divisjon. På slutten av oppgavearket finner dere en beskrivelse av hvordan polynomdivisjon utføres. Bruk denne metoden i denne oppgaven.

d) Regn ut determinanten $det(M)$ til matrisa M ved å bruke formelen for determinanten som involverer alle tallene i matrisa. Et generelt resultat i lineær algebra sier at determinanten til matrisa er lik produktet av egenverdiene. Sjekk at det stemmer i dette tilfellet. Dette er en oppgave dere får for å teste om dere kan pensum, vi skal ikke bruke determinanten noe videre i vårt eksempel.

e) Vi skal nå se litt nærmere på et konkret eksempel. Vi tenker oss at utvalget er 240 studenter Fordelingen mellom kaffe, te og vann i første pause er $x_1 = 180$ kaffe, $y_1 = 20$ te og $z_1 = 40$ vann, dvs

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Regn ut P_2 og P_3. (Vi tillater oss å operere med ikke-hele personer, f.eks. 109,6 personer)

f) For å beregne hva som skjer med fordelingen over tid (mange pauser senere) skal vi bruke *spektralteori*, dvs. at vi på en smart måte utnytter vår kjennskap til matrisas egenvektorer og -verdier. Vi starter med å uttrykke startvektoren P_1 som en lineær kombinasjon av egenvektorer (de du fant i oppgave c)), dvs. skriv

$$P_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

for passende verdier av a_1, a_2 og a_3.

g) Nå skal vi utnytte denne oppsplittingen i egenvektorene til M til å beregne $P_n = M^{n-1} P_1$ for alle verdier av n. Oppgaven er altså å finne en formel for P_n ved hjelp av verdiene i vektoren P_1 og n. Bruk så formelen til å angi hva som skjer med fordelingen i det lange løp, dvs. grenseverdien for P_n når $n \to \infty$.

h) Siste delspørsmål er en mer teoretisk oppgave enn de første. Matrisa M har en litt spesiell egenskap, nemlig at summen av tallene i hver kolonne er 1. Dette medfører faktisk at verdien 1 må være en egenverdi for den samme matrisa. Kan du gi et teoretisk argument for dette?

Ved rettingen gis hvert delspørsmål 0-5 poeng, dvs. maks poengsum 40. Grensen for å få godkjent settes til 20 poeng (altså minst halvparten av maks).

Vi skal vise polynomdivisjon ved et konkret eksempel.

Vi ønsker å utføre polynomdivisjonen $(x^3 - 2x^2 + 4x + 7) : (x + 1)$. Svaret skal bli et 2. grads polynom. Vi begynner med høyeste potens av x, i dette tilfellet x^3 og ser "hvor mange ganger" $x + 1$ går opp i $x^3 - 2x^2 + 4x + 7$. Vi holder oss hele tiden til de høyeste potensene og da blr svaret x^2. Vi ganger ut og får på samme måte som for vanlig divisjon

$$\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 \\
\underline{x^3 + \ x^2}
\end{array}$$

Vi trekker fra slik vi gjør ved vanlig divisjon av tall, og trekker samtidig ned det neste leddet i polynomet

$$\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 \\
\underline{x^3 + \ x^2} \\
\quad - 3x^2 + 4x
\end{array}$$

Nå ser vi at $x + 1$ går opp en $-3x$-gang i $-3x^2 + 4x$. Vi ganger derfor $x + 1$ med $-3x$ og får $-3x^2 - 3x$, som vi trekker fra $-3x^2 + 4x$ og får

$$\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 - 3x \\
\underline{x^3 + \ x^2} \\
\quad - 3x^2 + 4x \\
\quad \underline{-3x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad 7x + 7
\end{array}$$

Til slutt ser vi at $x + 1$ må ganges med 7 for å få $7x + 7$. Det gir

$$\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 - 3x + 7 \\
\underline{x^3 + \ x^2} \\
\quad - 3x^2 + 4x \\
\quad \underline{-3x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad 7x + 7 \\
\qquad\qquad \underline{7x + 7} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$