MAT 1001, Høsten 2011

Oblig 2

Innleveringsfrist: Torsdag 10. november kl. 1430

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1001). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen.

Ved rettingen gis hvert delspørsmål 0-5 poeng, dvs. maks poengsum 50. Grensen for å få godkjent settes til 25 poeng (altså minst halvparten av maks). I tillegg kreves det at man har forsøkt seg på alle delspørsmålene, dvs. man får ikke godkjent oppgaven dersom noen delspørsmål er helt blanke.

Oppgave 1

En lydbølge er beskrevet ved en funksjon

$$f(t) = A\cos(\omega(t - t_0))$$

der A er amplituden (lydstyrken) og ω er sirkelfrekvensen. Frekvensen til lyden er gitt ved $\frac{\omega}{2\pi}$. Akrofasen t_0 bestemmer den minste positive t-verdien som gir oss en toppverdi for $f(t)$.

a) Bruk summeformelen for cosinus til å skrive $f(t)$ som en lineær kombinasjon av $\sin(\omega t)$ og $\cos(\omega t)$.

b) Vi skal legge sammen to lydbølger med samme frekvens. For enkelthets skyld antar vi i denne oppgaven at $A = 1$ og $\omega = 1$. Skriv summen

$$\cos(t - t_0) + \cos(t - t_1)$$

på formen $C\cos(t - t_2)$. Vis at $C = \sqrt{2 + 2\cos(t_0 - t_1)}$.

c) Betrakt to spesialtilfeller, i) $t_0 = t_1$ og ii) $t_1 - t_0 = \pi$. Forklar hva som skjer med de to lydbølgene i disse to tilfellene.

Oppgave 2

Vi har gitt en separabel differensiallikning

$$\frac{dy}{dt} = h(y)g(t)$$

Vi skal variere de to funksjonene $h(y)$ og $g(t)$ for å avdekke ulike fenomener som kan oppstå. Husk at en løsning av likningen er en funksjon $y = y(t)$. Vi tenker på t som tiden og y som en eller annen størrelse vi måler.

a) I første eksempel er $h(y) = y$ og $g(t) = \lambda$ (en konstant). Finn en generell løsning i dette tilfellet. Det er stor forskjell på om konstanten λ er positiv, negativ eller 0. Forklar hva som skjer med løsningen i disse tre tilfellene når vi lar $t \to \infty$.

b) I det neste eksempelet lar vi fortsatt $h(y) = y$, men nå lar vi $g(t) = \sin t$, altså en harmonisk funksjon. Dermed har vi en diff.likning der den deriverte blir tvunget til å variere periodisk. Løs likningen i dette tilfellet og vis at løsningene er periodiske.

c) Enda en ny variant, nå lar vi $h(y) = \sqrt{y}$ og $g(t) = e^{-t}$. Vi setter $y(0) = 1$. Finn løsningen til likningen.

Oppgave 3

Denne oppgaven dreier seg om å løse en separabel differensiallikning ved hjelp av delbrøkoppspalting. Vi betrakter differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = ay(A - y)$$

der $y > 0$ og A og a er positive konstanter.

a) Finn konstanter α og β slik at vi kan skrive

$$\frac{1}{y(A-y)} = \frac{\alpha}{y} + \frac{\beta}{A-y}$$

b) Bruk svaret i a) til å finne en generell løsning av likningen gitt over, når vi setter $y(0) = \frac{A}{2}$. Hva skjer med y når $t \to \infty$?

c) Differensiallikningen modellerer en fysisk prosess. Når vi lar $t \to \infty$ finner vi en likevektstilstand for y. Det betyr at verdien av y etter som tiden går vil stabilisere seg på denne verdien. Forklar hvordan vi kan lese denne likevektstilstanden direkte ut av differensiallikningen (uten å regne slik vi gjorde i b) og c).)

d) La $y = y(t)$ være løsning av difflikningen. Avgjør når endringen i y er størst, ved å bruke likningen direkte.

SLUTT