Vi skal finne én spesiell løsning x_n^s av likningen

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 3n - 1$$

i form av et polynom $x_n^s = g(n)$. Vi skal gjøre dette uten at vi på forhånd spesifiserer verdien på koeffisientene a og b, men vi kommer til å få bruk for at det karakteristiske polynomet

$$r^2 + ar + b = 0 \quad \text{har røtter} \quad r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Strategien vår er å prøve med et polynom av to grader høyere enn polynomet $3n - 1$ (som er av grad 1), dvs av grad 3:

$$x_n^s = g(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

Innsatt i likningen gir dette

$$\begin{aligned}
x_{n+2}^s &+ ax_{n+1}^s + bx_n^s = g(n+2) + a \cdot g(n+1) + b \cdot g(n) \\
&= A(n+2)^3 + B(n+2)^2 + C(n+2) + D \\
&\quad + a(A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + D) \\
&\quad + b(An^3 + Bn^2 + Cn + D) \\
&= An^3 + 6An^2 + 12An + 8A + Bn^2 + 4Bn + 4B + Cn + 2C + D \\
&\quad + aAn^3 + 3aAn^2 + 3aAn + aA + aBn^2 + 2aBn + aB + aCn + aC + aD \\
&\quad + bAn^3 + bBn^2 + bCn + bD \\
&= (A + aA + bA)n^3 + (6A + B + 3aA + aB + bB)n^2 \\
&\quad + (12A + 4B + C + 3aA + 2aB + aC + bC)n \\
&\quad + (8A + 4B + 2C + D + aA + aB + aC + aD + bD) \\
&= A(1 + a + b)n^3 + (A(6 + 3a) + B(1 + a + b))n^2 \\
&\quad + (A(12 + 3a) + B(4 + 2a) + C(1 + a + b))n \\
&\quad + (A(8 + a) + B(4 + a) + C(2 + a) + D(1 + a + b))
\end{aligned}$$

skal være lik $3n - 1$. Det gir et system av fire likninger som må være oppfyllt

$$\begin{aligned}
A(1 + a + b) &= 0 \\
A(6 + 3a) + B(1 + a + b) &= 0 \\
A(12 + 3a) + B(4 + 2a) + C(1 + a + b) &= 3 \\
A(8 + a) + B(4 + a) + C(2 + a) + D(1 + a + b) &= -1
\end{aligned}$$

Vi skal se på tre tilfeller:

(i) $r_1 = r_2 = 1$. Siden de to røttene er sammenfallende må vi ha $a^2 - 4b = 0$ og siden verdien er 1 må vi ha $\frac{-a}{2} = 1$. Det betyr $a = -2$ og $b = 1$ og dermed $1 + a + b = 2 + a = 0$. Det gir for likningsystemet over:

$$\begin{aligned}
0A &= 0 \\
0A + 0B &= 0 \\
6A + 0B + 0C &= 3 \\
6A + 2B + 0C + 0D &= -1
\end{aligned}$$

eller $6A = 3$ og $6A + 2B = -1$. Mao, vi trenger ikke C og D, men må ha med A og B. I dette tilfellet må vi gjette på et polynom av grad 2 høyere, men trenger ikke de to laveste gradene.

(ii) $r_1 = 1$, $r_2 \neq 1$. Det betyr

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = 1$$

som gir $\pm\sqrt{a^2 - 4b} = 2 + a$ eller $a^2 - 4b = 4 + 4a + a^2$. Dette er ekvivalent med $4(1 + a + b) = 0$ og derfor $1 + a + b = 0$. Siden vi har to forskjellige røtter må $a^2 - 4b \neq 0$ og derfor $2 + a \neq 0$. Det gir likningssystem

$$\begin{aligned} 0A &= 0 \\ A(6 + 3a) + 0B &= 0 \\ A(12 + 3a) + B(4 + 2a) + 0C &= 3 \\ A(8 + a) + B(4 + a) + C(2 + a) + 0D &= -1 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 3(2 + a)A &= 0 \\ 3(4 + a)A + 2(2 + a)B &= 3 \\ (8 + a)A + (4 + a)B + (2 + a)C &= -1 \end{aligned}$$

Bruker vi at $2+a \neq 0$ får vi $A = 0$, $2(2+a)B = 3$ og $(4+a)B+(2+a)C = -1$, som sier oss at vi klarer oss med et polynom av grad 2 (fordi $A = 0$) og at vi kan droppe konstantleddet siden vi ikke har noen krav på D.

(iii) $r_1, r_2 \neq 1$. Det gir $1 + a + b \neq 0$, og for likningssytemet får vi $A = 0$, $B = 0$ og

$$\begin{aligned} C(1 + a + b) &= 3 \\ C(2 + a) + D(1 + a + b) &= -1 \end{aligned}$$

Som betyr at det holder å gjette på et polynom av samme grad som høyresiden i likningen.