MAT 1001, Høsten 2012

Oblig 1

Innleveringsfrist: Torsdag 20. september kl. 1430

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1001). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen.

Ved rettingen gis hvert delspørsmål inntil 2-8 poeng og maks poengsum er 40. Grensen for å få godkjent settes til 20 poeng (altså minst halvparten av maks), men det kreves i tillegg at man har gjort et forsøk på å løse oppgavene a)-g).

Denne obligatoriske oppgaven tar for seg en tenkt situasjon, hvor problemstillingen dreier seg om studentenes ankomst til forelesningssalen. Vi antar at læreren kommer til forelesningen noen minutter før forelesningen starter og bruker den siste tiden til å rigge opp datamaskin, klargjøre lerret etc. Studentene deler vi i tre grupper. De som kommer før foreleseren, de som kommer mens han klargjør utstyret og de som kommer etter at forelesningen har startet. Vi skal stille opp en dynamisk modell som beskriver fordelingen mellom de tre ankomstperiodene og hvordan studentene velger ankomst til neste forelesning på bakgrunn av hva de valgte ved forrige forelesning.

Dynamikken er som følger: Flesteparten, dvs. 70%, av de som kom for tidlig fortsetter å komme for tidlig, mens 10% kommer for sent og 20% kommer mens foreleseren gjør seg klar. Gruppen som kommer mens foreleseren gjør seg klar har en tendens til å fortsette å komme på det tidspunktet. Dette gjelder 80% av dem, men noen kommer likevel tidligere, 10%, og 10% kommer for sent. Blant de som kommer for sent er det en relativt stor gruppe på 50% som fortsetter å komme for sent, mens 30% kommer mens foreleseren klargjør. De siste 20% kommer for tidlig til neste forelesning.

Vi lar x betegne andelen som kommer for tidlig, y andelen som kommer mens foreleseren gjør klar og z andelen som kommer for sent. Indeksen indikerer nummeret på forelesningene, slik at x_1 betegner andelen som kommer for tidlig til første forelesning, z_3 andelen som kommer for sent til tredje forelesning, etc. Fordelingen mellom de tre (for tidlig-under klargjøring-for sent) til forelesning nummer n gis ved en søylevektor:

$$P_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Dynamikken i valgene er beskrevet av en overgangsmatrise M gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

dvs. at fordelingen til forelesning nummer $n+1$ beregnes ut fra fordelingen til forelsning nummer n ved matriseproduktet

$$P_{n+1} = M \cdot P_n$$

a) (2 poeng) Matrisa M representerer i dette tilfellet vår modell for dynamikken i valgene. Forklar kort sammenhengen mellom tallene i matrisa og prosentandelene gitt i innledningen.

b) (3 poeng) Regn ut kvadratet M^2. Hvs skal vi med dette? Jo, det beskriver hva som skjer med fordelingen mellom ankomsttidene når vi hopper to forelesninger fram. For å finne ut hva som skjer med fordelingen enda senere ville vi ha bruk for høyere potenser av M, men den utforskningen skal vi gjør på en annen måte.

c) (8 poeng) Finn egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ til M og de tilhørende egenvektorene, v_1, v_2, v_3. I dette eksemplet vil dere få et karakteristisk polynom av grad 3. Selv om Cardano allerede i 1545 presenterte en generell formel for å løse 3.gradslikninger skal vi forenkle oppgaven litt ved å opplyse om at den ene egenverdien er lik $\lambda_1 = 1$. Den tilhørende egenvektoren er

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dermed har dere oppgitt en av røttene til den karakteristiske likningen og det gjør det adskillig enklere å finne de to andre egenverdiene. Metoden vi benytter til dette kalles polynomdivisjon og den minner veldig om vanlig divisjon. På slutten av oppgavearket finner dere en beskrivelse av hvordan polynomdivisjon utføres. Bruk denne metoden i denne oppgaven.

d) (5 poeng) Regn ut determinanten $det(M)$ til matrisa M ved å bruke formelen for determinanten som involverer alle tallene i matrisa. Et generelt resultat i lineær algebra sier at determinanten til matrisa er lik produktet av egenverdiene. Sjekk at det stemmer i dette tilfellet. Dette er en oppgave dere får for å teste om dere kan pensum, vi skal ikke bruke determinanten noe videre i vårt eksempel.

e) (4 poeng) Vi skal nå se litt nærmere på et konkret eksempel. Vi tenker oss at utvalget er 240 studenter. Fordelingen mellom for tidlig, i forberedelsesperioden og for sent til første forelesning er $x_1 = 180$ for tidlig, $y_1 = 50$ til forberedelsene og $z_1 = 10$ for sent, dvs

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Regn ut P_2 og P_3. (Vi tillater oss å operere med ikke-hele personer, f.eks. 109,6 personer)

f) (5 poeng) For å beregne hva som skjer med fordelingen over tid (mange forelesninger senere) skal vi bruke *spektralteori*, dvs. at vi på en smart måte utnytter vår kjennskap til matrisas egenvektorer og -verdier. Vi starter med å uttrykke startvektoren P_1 som en lineær kombinasjon av egenvektorer (de du fant i oppgave c)), dvs. skriv

$$P_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

for passende verdier av a_1, a_2 og a_3.

g) (8 poeng) Nå skal vi utnytte denne oppsplittingen i egenvektorene til M til å beregne $P_n = M^{n-1} P_1$ for alle verdier av n. Oppgaven er altså å finne en formel for P_n ved hjelp av verdiene i vektoren P_1 og n. Bruk så formelen til å angi hva som skjer med fordelingen i det lange løp, dvs. grenseverdien for P_n når $n \to \infty$.

h) (5 poeng) Siste delspørsmål er en mer teoretisk oppgave enn de første. Matrisa M har en litt spesiell egenskap, nemlig at summen av tallene i hver kolonne er 1. Dette medfører faktisk at verdien 1 må være en egenverdi for den samme matrisa. Kan du gi et teoretisk argument for dette?

Vi skal vise polynomdivisjon ved et konkret eksempel.

Vi ønsker å utføre polynomdivisjonen $(x^3 - 2x^2 + 4x + 7) : (x + 1)$. Svaret skal bli et 2. grads polynom. Vi begynner med høyeste potens av x, i dette tilfellet x^3 og ser "hvor mange ganger" $x + 1$ går opp i $x^3 - 2x^2 + 4x + 7$. Vi holder oss hele tiden til de høyeste potensene og da blir svaret x^2. Vi ganger ut og får på samme måte som for vanlig divisjon

$$\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 \\ \underline{x^3 + \ x^2} \end{array}$$

Vi trekker fra slik vi gjør ved vanlig divisjon av tall, og trekker samtidig ned det neste leddet i polynomet

$$\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 \\ \underline{x^3 + \ x^2} \\ \quad - 3x^2 + 4x \end{array}$$

Nå ser vi at $x + 1$ går opp en $-3x$-gang i $-3x^2 + 4x$. Vi ganger derfor $x + 1$ med $-3x$ og får $-3x^2 - 3x$, som vi trekker fra $-3x^2 + 4x$ og får

$$\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 - 3x \\ \underline{x^3 + \ x^2} \\ \quad - 3x^2 + 4x \\ \quad \underline{-3x^2 - 3x} \\ \qquad\qquad 7x + 7 \end{array}$$

Til slutt ser vi at $x + 1$ må ganges med 7 for å få $7x + 7$. Det gir

$$\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 - 3x + 7 \\ \underline{x^3 + \ x^2} \\ \quad - 3x^2 + 4x \\ \quad \underline{-3x^2 - 3x} \\ \qquad\qquad 7x + 7 \\ \qquad\qquad \underline{7x + 7} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$