MAT 1001, Høsten 2012

Oblig 2

Innleveringsfrist: Torsdag 8. november kl. 1430

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1001). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen.

Ved rettingen gis hvert delspørsmål 0-5 poeng, dvs. maks poengsum 60. Grensen for å få godkjent settes til 30 poeng (altså minst halvparten av maks). I tillegg kreves det at man har forsøkt seg på alle delspørsmålene, dvs. man får ikke godkjent oppgaven dersom noen delspørsmål er helt blanke.

Oppgave 1

I den første oppgaven skal vi studere en andre ordens inhomogen differenslikning gitt ved

$$x_{n+1} - \tfrac{3}{2}x_n - x_{n-1} = -\tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{7}{3}, \qquad n \geq 1$$

a) Finn den generelle løsningen x_n^h til den assosierte homogene differenslikningen.

b) Finn en spesiell løsning x_n^s som tilfredsstiller den inhomogene likningen. Bruk dette til å skrive opp en generell løsning $x_n = x_n^h + x_n^s$ av den inhomogene likningen.

c) Vi gir initialbetingelsene $x_0 = 3$, $x_1 = \frac{31}{6}$. Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller disse initialbetingelsene.

d) Hva skjer med x_n når $n \to \infty$?

Oppgave 2

En lydbølge er beskrevet ved en funksjon

$$f(t) = A\cos(t - t_0)$$

der A er amplituden (lydstyrken). Frekvensen til lyden er gitt ved $\frac{1}{2\pi}$. Akrofasen t_0 bestemmer den minste positive t-verdien som gir oss en toppverdi for $f(t)$.

a) Bruk summeformelen for cosinus til å skrive $f(t)$ som en lineær kombinasjon av $\sin t$ og $\cos t$.

b) Vi skal legge sammen to lydbølger med samme frekvens. For enkelthets skyld antar vi i denne oppgaven at $A = 1$. Skriv summen

$$\cos(t - t_0) + \cos(t - t_1)$$

på formen $C\cos(t - t_2)$. Vis at $C = \sqrt{2 + 2\cos(t_0 - t_1)}$.

c) Betrakt to spesialtilfeller, i) $t_0 = t_1$ og ii) $t_1 - t_0 = \pi$. Forklar hva som skjer med de to lydbølgene i disse to tilfellene.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi bruke at

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n$$

a) Vi har bruk for å vite at grenseverdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Vis at dette er tilfelle for alle h på formen $h = \frac{1}{n}$ ved å bruke formelen for e gitt over.

b) La $f(x) = e^x$. Den deriverte til funksjonen f er gitt ved formelen

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Bruk resultatet i a) og definisjonen av den deriverte til å vise at $f'(x) = e^x$.

Oppgave 4

a) Beregn integralet

$$\int \tan x \, dx$$

Vi antar i denne oppgaven og i oppgave b) at $\cos x > 0$.

b) Løs differensiallikningen

$$y' + (2 \tan x) y = 2 \tan x$$

der $y(0) = 3$.

c) Summeformelen for sinus sier at $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Regn ut

$$\int \sin 2x \, dx \qquad 2 \int \sin x \cos x \, dx$$

ved henholdsvis substitusjon og delvis integrasjon. Svarene blir tilsynelatende forskjellige. Kommenter.

SLUTT