Løsningsforslag til Midtveis-eksamen H12

Oppgave 1

rad-reduser den utvidede matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 & 10 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ -3\cdot I \\ +I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ +II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-5) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$z = 1$

Oppgave 2

på matrise form:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ -1 & a-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A.} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alle a slik at $\det(A) \neq 0$ gir nøyaktig én løsning. Vi er derfor på jakt etter a slik at $\det(A) = 0$.

$$\det(A) = (a-1-3) - 2(-1-3) + (a+1)(-1-(a-1))$$
$$= a-4+8+(a+1)(-a)$$
$$= -a^2 + 4 = (2-a)(2+a)$$

Hvis $a = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ +I \\ -I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\cdot II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

✓ uendelig mange løsninger!

$a = 2$

Merk: Hvis $a=1$ får vi en rad på formen
$0 \quad 0 \quad 0 \mid 1$
og dermed ingen løsning

Oppgave 3

$$\begin{bmatrix} b & 1 & 2 \\ 3 & -1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = ?$$

$$2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad 2 \times 2$$

(Svaret skal bli en 2×2-matrise så vi kan utelukke alt. b og d med en gang)

$$\dots = \begin{bmatrix} b\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 & \dots \\ 3\cdot 0 - 1\cdot 1 + b\cdot 1 & \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & \dots \\ b-1 & \dots \end{bmatrix}$$

eneste mulige alternativ er a)

$$\begin{bmatrix} 3 & b-1 \\ b-1 & 4 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(1-\lambda) - 3$$

$$= \lambda^2 - 1 - 3 \quad = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

$\lambda = 2$ er en egenverdi

Oppgave 5

Vi sjekker hvilken vektor som er egenvektor

$$B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1(-1) - 1\cdot 0 \\ 1\cdot 2 + 1(-1) - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 1\cdot 1 \quad - 1(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 0(-1) \quad -4\cdot 0 \\ 2\cdot 2 + 0(-1) \quad -4\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot 1 \quad -4(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ er en egenvektor med tilhørende egenverdi $\lambda = -2$

fordi $B \cdot v = -2 \cdot v$

Oppgave 6

Imaginær-delen til $\underbrace{(1-2i)\cdot(1+2i)\cdot(3-i)}_{z!!}$?

$$(1-2i)(1+2i) = 1^2-(2i)^2$$

konjugat-setningen

$$= 1-4i^2 = 1-4(-1)$$

$$= 5$$

så $z = 5\cdot(3-i) = \underline{15-5i}$

$$\operatorname{Im} z = -5$$

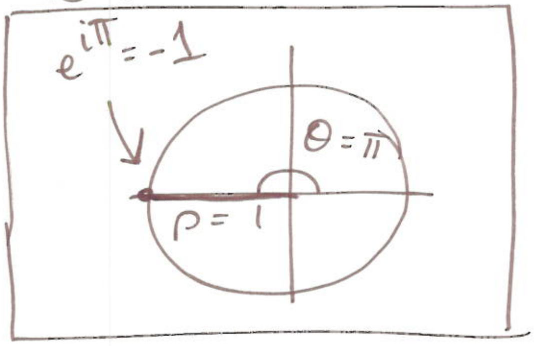
Oppgave 7

Normalformen til $\overbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2e^{i\pi/3}-1\right)\left(e^{i\pi}+i\right)}^{z}$?

- $\left(2e^{i\pi/3}-1\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) - 1$

  $= 2\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = \sqrt{3}\,i$

- $\left(e^{i\pi} + i\right) = -1 + i$



$$z = \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\left(\cancel{\sqrt{3}}\,i\right)\left(-1+i\right)$$

$$= i\left(-1+i\right) = -i + i^2 = \underline{-1-i}$$

Oppgave 8

Tiende-rot av $i = \sqrt{-1}$?

Husk at vi kan skrive i som

$$e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right)}$$ for alle heltall k.

$$\text{"} \; i^{1/10} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right) \cdot \frac{1}{10}} \; \text{"}$$

$$\omega_k = e^{i\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{10} \cdot k\right)}$$

$$= e^{i\left(\frac{\pi + 4k \cdot \pi}{20}\right)}$$

$$\underline{\omega_1} = e^{i\left(\frac{5\pi}{20}\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Oppgave 9

$$x_{n+1} - 0.3\, x_n = 1.4 \quad , \qquad (*)$$

Hva skjer med x_n når $n \to \infty$?

- generell løsning av $x^h_{n+1} - 0.3\, x^h_n = 0$
  er $x^h_n = C \cdot (0.3)^n$
- gjetter at $x^s_n = A$ er spesiell løsning av $(*)$

$$\begin{aligned} A - 0.3 A &= 1.4 \\ A(0.7) &= 1.4 \\ A &= \frac{1.4}{0.7} = 2 \end{aligned}$$

- generell løsning av $*$:

$$x_n = x^h_n + x^s_n = \underbrace{C \cdot 0{,}3^n}_{\to 0 \text{ når } n \to \infty} + \underbrace{2}_{\to 2 \text{ når } n \to \infty}$$

så $x_n \to 2$ når $n \to \infty$

Oppgave 10

$$x_{n+1} - x_n = 2n \qquad (*)$$

$$x_0 = 0$$

$$x_{20} = ?$$

Vi kan enten regne ut ettogett ledd t.o.m. x_{20}, eller finne en formel for løsningen.

- generell løsning av $x_{n+1}^h - x_n^h = 0$ er $x_n^h = C \cdot 1^n = C$
- gjetter at $x_n^s = An^2 + Bn$ er spesiell løsning av $(*)$. Grunnen til at vi går opp én grad er at $r = 1$

$$A(n+1)^2 + B(n+1) - An^2 - B(n) = 2n$$

$$\cancel{An^2} + 2An + A + \cancel{Bn} + B - \cancel{An^2} - \cancel{Bn} = 2n$$

$$2An + A + B = 2n$$

Må ha

I $2A = 2 \Rightarrow A = 1$

II $A + B = 0 \Rightarrow B = -1$ $\quad x_n^s = n^2 - n$

- generell løsning av $*$ er $x_n^h + x_n^s = C + n^2 - n$
- bruker $x_0 = 0$ til å finne C:

$$0 = C + n^2 - n = C, \Rightarrow \underline{C = 0}$$

spesiell løsning: $x_n = n^2 - n$, $x_{20} = 20^2 - 20 = 380$

Oppgave 11

$$M = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

egenvektorer

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Finn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$

- egenverdiene til M:

$$\det(M - \lambda I) = \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)\left(\frac{5}{6} - \lambda\right) - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}$$

$$= \frac{10}{18} - \frac{5}{6}\lambda - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{18}$$

$$= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$ egenverdiene

Observer: $M \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix}$ så λ_1

er tilhørende $\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix}$ mens λ_2 er tilhørende $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n\left(\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = M^n\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} + M^n\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1^n\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} + \lambda_2^n\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{12 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 4}{12 + \left(\frac{1}{2}\right)^n(-2)} = \frac{12}{12} = 1$$