

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i                      MAT1001 — Matematikk 1  
Eksamensdag:                Torsdag 11. desember 2014.  
Tid for eksamen:            09:00 – 13:00.  
Oppgavesettet er på 2 sider.  
Vedlegg:                      Ingen.  
Tillatte hjelpemidler:    Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst,  
håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før  
du begynner å besvare spørsmålene.

For hver oppgave er det angitt en maksimal poengskår. Til sammen kan du oppnå 61 poeng. Poengene på dagens eksamen multipliseres med 66/61 og legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseeksamen, slik at maksimal samlet poengsum blir 100. Denne summen legges til grunn for karakteren du får i kurset.

### Oppgave 1    (8 poeng)

Et lineært ligningssystem er gitt ved at

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y + 2z &= 0 \\2x + \alpha y + 3z &= \alpha + 1,\end{aligned}$$

der  $\alpha$  er en konstant. Finn  $\alpha$  slik at ligningssystemet har uendelig mange løsninger. Finn alle løsningene i dette tilfellet.

### Oppgave 2    (8 poeng)

Finn den generelle løsningen på differensligningen

$$2x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1.$$

Hva blir  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ?

### Oppgave 3    (8 poeng)

En funksjon  $f$  tilfredstiller

$$f'(x) = e^x \sin(x), \quad f(0) = 1.$$

Finn  $f(x)$ .

(Fortsettes på side 2.)

## Oppgave 4

Vi ser på differensialligningen

$$y'' + 2y' + y = x. \quad (1)$$

**4a** (4 poeng)

Vis at  $y_1(x) = x - 2$  er en løsning av (1).

**4b** (6 poeng)

Finn den generelle løsningen på den homogene ligningen

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

og kall denne  $y_2$ .

**4c** (5 poeng)

Vis at  $y = y_1 + y_2$  løser (1) (Du trenger ikke bruke uttrykket for  $y_2$  funnet i **4b** for dette).

**4d** (5 poeng)

Finn løsningen på (1) som er slik at  $y(0) = y'(0) = 0$ .

## Oppgave 5

På et fly som flyr med hastighet  $v(t)$  virker en motstandskraft som er proporsjonal med  $v^2$ , og har motsatt retning. I tillegg virker en skyvekraft fra motoren. Vi kaller denne kraften  $F$ , og vi antar at  $F$  er konstant. Da sier Newtons 2. lov at

$$mv' = F - kv^2,$$

der  $m$  er massen til flyet. Vi antar at  $m = m(t) = m_0 - t$ , siden flyet bruker opp brennstoff med en konstant rate mens det flyr.

**5a** (9 poeng)

Anta i resten av oppgaven at  $F = 4$ ,  $k = 1$ ,  $m_0 = 1$  og  $v(0) = 0$ . Finn  $v(t)$ .

**5b** (8 poeng)

Anta at halvparten av den initielle vekten til flyet er drivstoff, derfor vil alt drivstoffet være oppbrukt når  $t = 1/2$ , og dermed stopper motoren og  $F = 0$ . Forklar at for  $t > 1/2$  så vil hastigheten tilfredsstille

$$\frac{1}{2}v' = -v^2,$$

og finn en formel for hastigheten til flyet for  $t > 1/2$ .

SLUTT