UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Ny/Utsatt eksamen i:	MAT1001 — Matematikk 1
Eksamensdag:	Torsdag 15. januar 2015.
Tid for eksamen:	14:30 – 18:30.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

For hver oppgave er det angitt en maksimal poengskår. Til sammen kan du oppnå 66 poeng. Poengene på dagens eksamen legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseksamen, slik at maksimal samlet poengsum blir 100. Denne summen legges til grunn for karakteren du får i kurset.

Oppgave 1 (8 poeng)

Finn begge egenverdiene og de tilhørende egenvektorene for matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Løsningsforslag: Karakteristisk polynom blir

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6,$$

som har røtter $\lambda_1 = 6$ og $\lambda_2 = -1$. Vi finner en egenvektor for λ_1 som $\binom{3}{4}$, og for λ_2 som $\binom{1}{-1}$.

Oppgave 2 (8 poeng)

En sykdom sprer seg i en befolkning slik at antall syke etter $n + 2$ uker er halvparten av antall syke etter $n + 1$ uker pluss halvparten av antall syke etter n uker, pluss 6. Hvis vi lar x_n betegne antall syke etter n uker vil dermed x_n oppfylle differensligningen

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n + 6.$$

Finn den generelle løsningen på denne differensligningen. Vil denne sykdommen forsvinne av seg selv etter hvert som antall uker vokser?

(Fortsettes på side 2.)

Løsningsforslag: Karakteristisk polynom er $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$, med røtter 1 og $-\frac{1}{2}$. Dette gir at løsningen på den homogene ligningen blir

$$x_n^{\mathrm{h}} = C + D\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

For å finne løsningen på den inhomogene ligningen gjetter vi på $x_n^{\mathrm{i}} = An$, setter inn og får

$$A(n+1) = \frac{A}{2}(n+n-1)+6,$$

med løsning $A = 4$. Dette gir $x_n = C + D(-\frac{1}{2})^n + 4n$. Når n blir stor vil hele befolkningen ha denne sykdommen.

Oppgave 3 (6 poeng)

En funksjon f tilfredstiller

$$f'(x) = x\ln(x), \qquad f(1) = 1.$$

Finn $f(x)$.

Løsningsforslag: Vi bruker delvisintegrasjon,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int x\ln(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C, \quad f(1) = 1 \text{ gir} \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Oppgave 4

4a (8 poeng)

Finn den generelle løsningen på differensialligningen

$$\sin(x)y' + \cos(x)y = \tan(x).$$

Løsningsforslag: Fra produktregelen for derivasjon (eller ved bruk av integrerende faktor) får vi at

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)y(x)) = \tan(x),$$

så da blir

$$\sin(x)y(x) = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx,$$

(Fortsettes på side 3.)

som vi kan løse ved substitusjon $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)\,dx$. Vi får

$$y(x)\sin(x) = -\ln|\cos(x)| + C,$$

eller

$$y(x) = \frac{C}{\sin(x)} - \frac{\ln|\cos(x)|}{\sin(x)}.$$

4b (8 poeng)

Finn den løsningen på differensialligningen

$$yy' = (1+y^2)x,$$

som er slik at $y(0) = 1$.

Løsningsforslag: Dette er en separabel ligning, vi har at

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int x\,dx.$$

Vi løser integralet til venstre ved substitusjon $u = 1 + y^2$, $du = 2dy$, og får at

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad \text{mao.} \quad y^2 = Ce^{x^2} - 1.$$

Betingelsen $y(0) = 1$ gir at $C = 2$, så $y(x) = \sqrt{2e^{x^2} - 1}$.

4c (8 poeng)

Finn den løsningen på differensialligningen

$$y'' - 2y' + 2y = 0,$$

som er slik at $y(0) = 0$ og $y(\frac{\pi}{3}) = 1$.

Løsningsforslag: Karakteristisk polynom blir $r^2 - 2r + 2$, med røtter $r = 1 \pm i$. Generell løsning blir da

$$y(x) = Ae^x\cos(x) + Be^x\sin(x).$$

Betingelsen $y(0) = 0$ gir at $A = 0$, og $y(\frac{\pi}{3}) = 1$ gir at $1 = Be^{\pi/3}(\frac{\sqrt{3}}{2})$, dvs. $y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{x-\pi/3}\sin(x)$.

Oppgave 5

5a (6 poeng)

I en vanntank med volum 10 liter er det løst opp 1 kg. salt. Vi tapper blanding ut fra tanken med 1 l/min., mens deg samtidig blir fylt på 1 liter rent vann

(Fortsettes på side 4.)

pr. minutt. Dersom $x(t)$ betegner mengden av salt i tanken etter t minutter vil x tilfredsstille differensialligningen

$$x'(t) = -\frac{1}{10}x(t).$$

Vis at $x(t) = e^{-t/10}$.

Løsningsforslag: Vi har at $x(0) = 1$, så dette stemmer, videre vil $x'(t) = -\frac{1}{10}e^{-t/10} = -\frac{1}{10}x(t)$, så x tilfredsstiller differensialligningen (som bare har én løsning).

5b (6 poeng)

Vi lar vannet som rant ut fra tanken i 5a renne ned i en annen tank på 10 l. Denne er fra starten fylt opp av 10 l. rent vann, og for at tanken ikke skal renne over vil det hvert minutt renne ut 1 liter blandet væske. La $y(t)$ betegne saltmengden i denne tanken etter t minutter, forklar at y tilfredsstiller differensialligningen

$$y'(t) = \frac{1}{10}e^{-t/10} - \frac{y(t)}{10}.$$

Løsningsforslag: Hvert minutt vil det renne inn 1/10 av saltet i den første tanken, og det vil renne ut 1/10 av $y(t)$.

5c (8 poeng)

Hva er maksimal saltmengde i den andre tanken?

Løsningsforslag: Vi løser ligningen

$$y' + \frac{1}{10}y = \frac{1}{10}e^{-t/10},$$

ved å multiplisere med $e^{t/10}$ på begge sider. Da får vi

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t/10}y(t)\right) = \frac{1}{10},$$

og dermed

$$y(t)e^{t/10} = \frac{t}{10} + C.$$

Vi har at $y(0) = 0$ så $C = 0$, og $y(t) = \frac{te^{-t/10}}{10}$. Vi finner maksimum ved å derivere (eller bruke diffligningen)

$$y'(t) = \frac{e^{-t/10}}{10}(1-t),$$

fra dette ser vi at $y'(t) > 0$ for $t < 1$ og $y'(t) < 0$ for $t > 1$. Derfor gir $t = 1$ maksimal y verdi, altså $\frac{1}{10}e^{-1/10}$.

(Fortsettes på side 5.)

SLUTT