LØSNINGER AV MIDTVEISEKSAMENER FOR MAT1001

KNUT AASEN

SAMMENDRAG. Heftet inneholder løsninger av midtveiseksamener gitt i MAT1001, fra og med høsten 2009 til og med høsten 2013. Med forbehold om feil.

1. Midtveis MAT1001 Høsten 2009 — Løsning

Problem 1. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y + 5z = 4 \\ -x - 2y - z = -1 \\ 3x + 4y - z = -3. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{III-3I \\ II+I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -16 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\overset{II+III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & -16 & -15 \end{pmatrix} \overset{\substack{II\cdot -\frac{1}{12}, III+16\cdot II \\ I-9\cdot II, II\leftrightarrow III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} x = -2, \\ y = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

■

Problem 2. Vi har det linære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -y + z = 1 \\ 2x + 2y + az = 4. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a & 4 \end{pmatrix} \overset{III-2\cdot I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nå at vi får én fri variabel hvis vi setter $a = -2$, og følgelig har vi uendelig mange løsninger når $a = -2$. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har at

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -a - 2 - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 = -a - 2 \iff a = -2.$$

Nå følger det av teorem 3.13 at svaret må være $a = -2$. ■

Date: 16. september 2014.

Problem 3. Vi har egenverdiene ved

$$0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = (\lambda+2)(\lambda-4) \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 4. \end{cases}$$

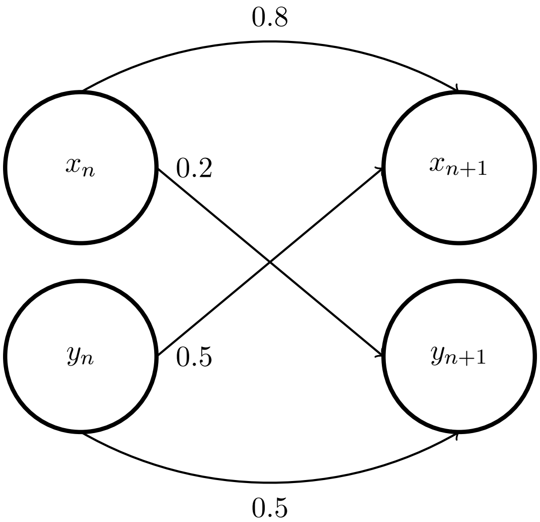
■

Problem 4. Vi multipliserer de gitte vektorene med B for å finne hvilken av de som ikke er en egenvektor for matrisen:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vi ser nå at $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, ikke er en egenvektor for B. ■

Problem 5. Vi kan illustrere overgangene ved



Av tegningen har vi at

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.8x_n + 0.5y_n \\ y_{n+1} = 0.2x_n + 0.5y_n, \end{cases}$$

slik at overgangsmatrisen M er gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

■

Problem 6. Vi har at

$$\begin{aligned} -2(1+2i)(2-i)(1+i) &= -2(2-i+4i+2)(1+i) = -2(4+3i)(1+i) \\ &= -2(4+7i-3) = -2-14i, \end{aligned}$$

og dermed er realdelen -2. ■

Problem 7. Vi har

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{4}} - 2i = 2\sqrt{2}i\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) - 2i = 2\sqrt{2}i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2i \\ &= 2i - 2 - 2i = -2. \end{aligned}$$

■

Problem 8. Vi har røttene til den karakteristiske likningen ved

$$r + \frac{1}{2} = 0 \iff r = -\frac{1}{2}$$

Nå har vi den homogene løsningen $x_n^h = C\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Videre finner vi partikulærløsningen, der vi først prøver med formen $x_n^p = A$, slik at

$$A + \frac{1}{2}A = \frac{3}{2} \iff A = 1.$$

Vi har nå partikulærløsningen $x_n^p = 1$ og følgelig har vi

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 \to 1, \quad \text{når } n \to \infty.$$

■

Problem 9. Vi har røttene til den karakteristiske likningen ved

$$r^2 - r - 6 = 0 \iff (r+2)(r-3) = 0 \begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = 3. \end{cases}$$

■

Problem 10. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$1 - r = 0 \iff r = 1.$$

Nå har vi den homogene løsningen $x_n^h = C$. Videre finner vi partikulærløsningen, der vi prøver med formen $x_n^p = An + B$, slik at

$$-n = An + B - (A(n+1) + B) = -A.$$

Dette gikk ikke, så vi går nå opp én grad og prøver med $x_n^p = An^2 + Bn + C$.

$$-n = An^2 + Bn + C - (A(n+1)^2 + B(n+1) + C) = -2An - A - B = -2An - A - B$$

Dette gir likningssystemet

$$\begin{cases} -2A = -1 \iff A = \frac{1}{2} \\ -A - B = 0 \iff B = -A \iff B = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nå har vi partikulærløsningen $x_n^p = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$, og følgelig har vi

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \to \infty, \quad \text{når } n \to \infty.$$

■

Problem 11. Vi finner egenverdiene ved

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2}) \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

For λ_1, har vi ved radreduksjon at

$$\begin{pmatrix} A - \lambda_1 I & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+I \\ I\cdot -2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \iff x_1 = 2x_2, \\ x_2 \text{ er fri.} \end{cases}$$

Vi setter $x_2 = 1$ og får egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Videre for λ_2, har vi ved radreduksjon at

$$\begin{pmatrix} A - \lambda_2 I & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{II - \frac{1}{2}\cdot I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \iff x_1 = -x_2, \\ x_2 \text{ er fri.} \end{cases}$$

Vi setter $x_2 = 1$ og får egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nå skriver vi $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene. Vi ønsker altså å finne α_1 og α_2 slik at

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \iff \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nå har vi det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 15 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 15. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 15 \\ 1 & 1 & 15 \end{pmatrix} \overset{I - 2\cdot II}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -15 \\ 1 & 1 & 15 \end{pmatrix} \overset{\substack{I\cdot -\frac{1}{3}, II - I \\ I \leftrightarrow II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{cases} \alpha_1 = 10 \\ \alpha_2 = 5. \end{cases}$$

Vi kan nå skrive $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 10\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$, som gir

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n (10\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2) = 10 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n \mathbf{v}_1 + 5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n \mathbf{v}_2$$

$$= 10(1)^n \mathbf{v}_1 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_2 = 10\mathbf{v}_1 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_2 \to 10\mathbf{v}_1, \quad \text{når } n \to \infty.$$

Følgelig har vi at $x_n \to 20$ når $n \to \infty$. ■

2. Midtveis MAT1001 Våren 2010 — Løsning

Problem 1. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x - y = 4a. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 4a \end{pmatrix} \overset{\substack{I-II \\ I \leftrightarrow II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4a \\ 0 & 4 & 4-4a \end{pmatrix} \overset{\substack{II \cdot \frac{1}{4} \\ I+II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+3a \\ 0 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \begin{cases} x = 1 + 3a \\ y = 1 - a. \end{cases}$$

■

Problem 2. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + az = 1 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{I-III \\ II+III}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{I \leftrightarrow II \\ I \leftrightarrow III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hvis vi nå setter $a = -1$, får vi et inkonsistent likningssystem. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-1-a) = 1 + a \iff a = -1.$$

Av teorem 3.13 må svaret være $a = -1$. ■

Problem 3. Vi har determinanten til A ved

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot a - 0 \cdot 1 + a - 1 + 1 \cdot 0 - 1 = 2a - 2. \end{aligned}$$

■

Problem 4. Vi finner egenverdiene til M ved

$$0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3. \end{cases}$$

■

Problem 5. Vi multipliserer de gitte vektorene med B for å finne hvilke av de som er egenvektorer for matrisen.

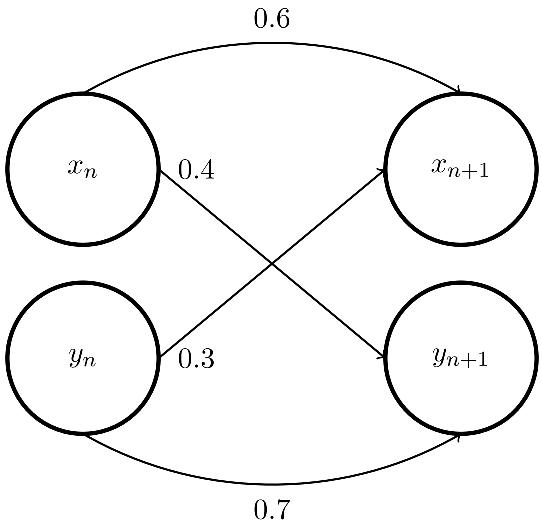
(a) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nå ser vi at $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for B med tilhørende egenverdi -2. ∎

Problem 6. Vi kan illustrere overgangene ved



Av tegningen har vi at

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.6x_n + 0.3y_n \\ y_{n+1} = 0.4x_n + 0.7y_n, \end{cases}$$

slik at overgangsmatrisen M er gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

∎

Problem 7. Vi har at

$$2(1-i)(1+i) - 2 = 2(1+1) - 2 = 2,$$

og følgelig er imaginærdelen 0. ∎

Problem 8. Vi har at

$$\begin{aligned} z = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\pi} &= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) - 1 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{3}{4} + i\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 = -1 + i \end{aligned}$$

∎

Kommentar: Alternativt kan vi multiplisere eksponentialene til å begynne med, slik at vi får

$$\begin{aligned} z = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\pi} &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} + \cos(\pi) + i\sin(\pi) = e^{i\frac{\pi}{2}} - 1 \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -1 + i. \end{aligned}$$

∎

Problem 9. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r + \frac{2}{3} = 0 \iff r = -\frac{2}{3}.$$

Følgelig er den homogene løsningen $x_n^h = C\left(-\frac{2}{3}\right)^n$. Videre finner vi partikulærløsningen, der vi først prøver med formen $x_n^p = A$, slik at vi får

$$A + \frac{2}{3}A = -\frac{10}{3} \iff A = -2.$$

Vi har nå partikulærløsningen $x_n^p = -2$, og dermed

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C\left(-\frac{2}{3}\right)^n - 2 \to -2, \quad \text{når } n \to \infty.$$

■

Problem 10. Vi har den karakteristiske likningen

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

og dermed røttene ved

$$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Slik at vi får modulusen ved

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Nå finner vi argumentet ved

$$\begin{aligned} \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \theta = \frac{\pi}{3} \text{ eller } \theta = \frac{2\pi}{3} \\ \cos\theta = -\frac{1}{2} &\iff \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ eller } \theta = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Følgelig har vi argumentet $\theta = \frac{2\pi}{3}$ og da den generelle løsningen

$$x_n = E\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + F\sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right).$$

Videre gir initialbetingelsene oss likningssystemet

$$\begin{cases} x_0 = 2 \iff E = 2 \\ x_1 = 1 \iff E\cos\frac{2\pi}{3} + F\sin\frac{2\pi}{3} = 2 \iff 2\left(-\frac{1}{2}\right) + F\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \iff F = \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Nå følger den endelige løsningen

$$x_n = 2\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right).$$

Slik at for $n = 2010$, så har vi

$$\begin{aligned} x_{2010} &= 2\cos\left(\frac{4020}{3}\pi\right) + \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{4020}{3}\pi\right) = 2\cos(1340\pi) + \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(1340\pi) \\ &= 2\cos(2\pi\cdot 670) + \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(2\pi\cdot 670) = 2\cos 2\pi + \frac{4}{\sqrt{3}}\sin 2\pi = 2. \end{aligned}$$

■

Problem 11. Vi finner partikulærløsningen, der vi først prøver med formen $x_n^p = An + B$.

$$4n = A(n+2) + B - (An + B) = 2A$$

Dette gikk ikke, så vi går opp én grad og prøver med $x_n^p = An^2 + Bn + C$.

$$4n = A(n+2)^2 + B(n+2) + C - (An^2 + Bn + C) = 4An + 4A + 2B$$

Vi har nå likningssystemet

$$\begin{cases} 4 = 4A \iff A = 1 \\ 0 = 4A + 2B \iff 0 = 4 + 2B \iff B = -2. \end{cases}$$

Nå har vi partiuklærløsningen $x_n^p = n^2 - 2n$, som er et av svaralternativene. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter svaralternativene inn i venstresiden av likningen og ser for hvilket vi oppnår likhet.

(a) $4(n+2) - 4n = 4n + 2 - 4n = 2$
(b) $4(n+2)^2 + (n+2) - 4(n^2 + n) = 4n^2 + 16n + 16 + n + 2 - 4n^2 - n = 16n + 18$
(c) $n + 2 - 2 - (n-2) = 2$
(d) $(n+2)^2 - 2(n+2) - (n^2 - 2n) = n^2 + 4n + 4 - 2n - 4 - n^2 + 2n = 4n$

Vi ser nå at svaralternativ (d) er en løsnings av den inhomogene differenslikningen. ■

3. Midtveis MAT1001 Høsten 2010 — Løsning

Problem 1. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = a \\ 2x + y + z = 3a + 3. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & 3a+3 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-3\cdot I \\ III-2\cdot I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & a-3 \\ 0 & 3 & -1 & 3a+1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{I+II \\ III-3\cdot II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & a-2 \\ 0 & 1 & -2 & a-3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \overset{\substack{III\cdot\frac{1}{5} \\ I+III, I+III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} x = a \\ y = a+1 \\ z = 2. \end{cases}$$

■

Problem 2. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 4x + ay = 2. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 4 & a & 2 \end{pmatrix} \overset{I\cdot\frac{1}{a}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 4 & a & 2 \end{pmatrix} \overset{II-4\cdot I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & a-\frac{4}{a} & 2-\frac{4}{a} \end{pmatrix}.$$

Hvis vi nå setter $a = 2$ får vi én fri variabel, og følgelig uendelig mange løsninger. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har at

$$0 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4 \iff a = \pm 2.$$

Nå setter vi inn for a i det opprinnelige system, for å sjekke for hvilket av tilfellene vi får uendelig mange løsninger. Vi starter med $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-2\cdot I \\ I\cdot\frac{1}{2}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nå har vi én fri variabel og følgelig har vi uendelig mange løsninger når $a = 2$. ■

Problem 3. Vi har at

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 1 - 2a + 1 + 3a - 2 - 3 = a - 3.$$

■

Problem 4. Vi har egenverdiene til M ved

$$0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda) - 8 = 15 - 8\lambda + \lambda^2 - 8$$
$$= \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda - 1)(\lambda - 7) \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 7. \end{cases}$$

■

Problem 5. Vi multipliserer de gitte vektorene med B for å finne hvilken av de som er en egenvektor for matrisen.

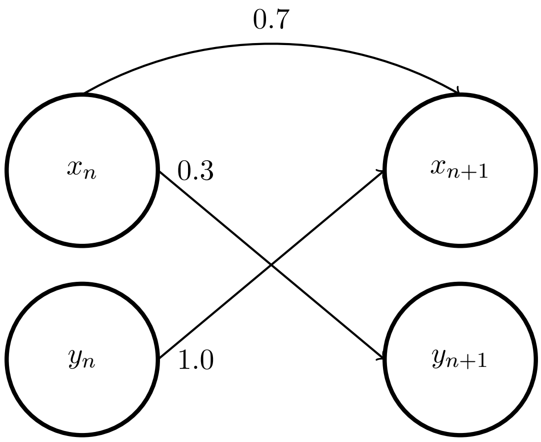
(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Nå ser vi at $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for B med tilhørende egenverdi 9. ∎

Problem 6. Vi kan illustrere overgangene ved



Av tegningen har vi at

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.7x_n + y_n \\ y_{n+1} = 0.3x_n, \end{cases}$$

slik at overgangsmatrisen M er gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.0 \\ 0.3 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

∎

Problem 7. Vi har at

$$\begin{aligned} 3(a+2i)(-1+i) + 7 + 3ai &= 3(-a + ai - 2i - 2) + 7 + 3ai \\ &= -3a + 3ai - 6i - 6 + 7 + 3ai = -3a + 1 + (6a - 6)i, \end{aligned}$$

og dermed er realdelen $-3a + 1$. ∎

Problem 8. Vi har at

$$\begin{aligned} z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} + 1 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) + 1 \\ &= 2i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 1 = \sqrt{3}i - 1 + 1 = \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

∎

Kommentar: Alternativt kan vi multiplisere eksponentialene til å begynne med, slik at vi får

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} + 1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} + 1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = i\sqrt{3}.$$

■

Problem 9. Vi har roten til den karakteristiske likningen

$$r - 0.6 = 0 \iff r = 0.6.$$

Dette gir den homogene løsningen $x_n^h = C(0.6)^n$. Videre finner vi partikulærløsningen, der vi prøver med formen $x_n^p = A$.

$$2 = A - 0.6A \iff A = \frac{2}{0.4} = 5$$

Nå har vi partikulærløsningen $x_n^p = 5$, og følgelig har vi

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C(0.6)^n + 5 \to 5, \quad \text{når } n \to \infty.$$

■

Problem 10. Vi har den karakteristiske likningen

$$r^2 - 0.4r - 0.6 = 0$$

og dermed røttene ved

$$r = \frac{0.4}{2} \pm \frac{\sqrt{\frac{4}{25} + \frac{12}{5}}}{2} = \frac{1}{5} \pm \frac{\left(\frac{8}{5}\right)}{2} = \frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Nå har vi den generelle løsningen $x_n = C + D\left(-\frac{3}{5}\right)^n$. Videre gir initialbetingelsene oss likningssystemet

$$\begin{cases} x_0 = 50 \iff C + D = 50 \\ x_1 = 34 \iff C - \frac{3}{5}D = 34. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 50 \\ 1 & -\frac{3}{5} & 34 \end{pmatrix} \overset{II-I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 50 \\ 0 & -\frac{8}{5} & -16 \end{pmatrix} \overset{II\cdot -\frac{5}{8}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \overset{I-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{cases} C = 40 \\ D = 10. \end{cases}$$

Nå har vi at

$$x_n = 40 + 10\left(-\frac{3}{5}\right)^n \to 40, \quad \text{når } n \to \infty.$$

■

Problem 11. Vi har den karakteristiske likningen

$$r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0,$$

og dermed røttene ved

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i.$$

Nå får vi modulusen

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

Vi får argumentet ved

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{6} \text{ eller } \theta = \frac{5\pi}{6}$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{6} \text{ eller } \theta = \frac{11\pi}{6}.$$

Følgelig har vi argumentet $\theta = \frac{\pi}{6}$, og videre er den generelle løsningen

$$x_n = E\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + F\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$$

Når gir initialbetingelsene oss likningssystemet

$$\begin{cases} x_0 = 0 \iff E = 0 \\ x_1 = 1 \iff F\sin\frac{\pi}{6} = 1 \iff F = 2 \end{cases}$$

Da følger den endelige løsningen $x_n = 2\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$, som gir

$$x_{15} = 2\sin\left(15\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{3\cdot 5}{3\cdot 2}\pi\right) = 2\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 2\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2\cdot 1 = 2.$$

■

4. Midtveis MAT1001 Høsten 2011 — Løsning

Problem 1. Vi har at

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 - 2(-1 \cdot -1 + 2 \cdot 0) + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 = -10.$$

■

Problem 2. Vi har matriseproduktet ved

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 3 & a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & a \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 + a \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot 1 + a \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & a-1 \\ a-1 & 4 \end{pmatrix}.$$

■

Problem 3. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y + 3z = 7 \\ x + 2y - 2z = -4 \\ 2x + 3y - 4z = -7. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-2I \\ II-I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & 1 & -10 & -21 \end{pmatrix} \overset{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\substack{II-III \\ III\cdot -\frac{1}{5}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{I-II \\ I-3\cdot III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 2. \end{cases}$$

■

Problem 4. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + 2z = 2. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 2 & a & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+I \\ III-2\cdot I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a+1 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hvis vi nå setter $a = 2$ får vi én fri variabel og følgelig uendelig mange løsninger. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & a \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 4 - a^2 - (-2 - 2a) - a - 4$$
$$= -a^2 + a + 2 = -(a-2)(a+1) \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -1. \end{cases}$$

Nå setter vi inn for a i det opprinnelige system, for å sjekke for hvilket av tilfellene vi får uendelig mange løsninger. Vi starter med $a = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{III-2I \\ II+I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nå har vi én fri variabel og følgelig uendelig mange løsninger når $a = 2$. ■

Problem 5. Vi har egenverdiene til M ved

$$0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = -2 + \lambda + \lambda^2 - 4$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2. \end{cases}$$

■

Problem 6. Vi multipliserer de gitte vektorene med B for å finne hvilken av de som er egenvektorer for matrisen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vi ser nå at $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for B med tilhørende egenverdi 1. ■

Problem 7. Vi har

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\pi} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) + \cos\pi + i\sin\pi$$
$$= \sqrt{2}(0 + i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = i.$$

■

Kommentar: Alternativt kan vi multiplisere eksponentialene til å begynne med, slik at vi får

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\pi} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + \cos(\pi) + i\sin(\pi) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} - 1$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - 1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = i.$$

■

Problem 8. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r - \frac{1}{2} = 0 \iff r = \frac{1}{2},$$

slik at den homogene løsningen er gitt ved $x_n^h = C\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Videre finner vi partikulærløsningen der vi først prøver med formen $x_n^p = A$.

$$\frac{1}{2} = A - \frac{1}{2}A \iff A = 1$$

Nå har vi partikulærløsningen $x_n^p = 1$, og dermed

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \to 1, \quad \text{når } n \to \infty.$$

■

Problem 9. Vi har røttene til den karakteristiske likningen ved

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \iff (r+3)(r-1) = 0 \begin{cases} r_1 = -3 \\ r_2 = 1. \end{cases}$$

Nå har vi den generelle løsningen

$$x_n = C(-3)^n + D(1)^n = C(-3)^n + D.$$

Videre gir initialbetingelsene oss likningssystemet

$$\begin{cases} x_0 = 2 \iff C + D = 2 \\ x_1 = 2 \iff -3C + D = 2. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{II+3\cdot I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \overset{\substack{II\cdot\frac{1}{2} \\ I-II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} C = 0 \\ D = 2. \end{cases}$$

Følgelig har vi den endelige løsningen $x_n = 2$, og følgelig er $x_{2011} = 2$. ■

Problem 10. Vi finner partikulærløsningen, der vi først prøver med formen $x_n^p = An + B$.

$$4n + 6 = A(n+2) + B - (An + B) = An + 2A + B - An - B = 2A$$

Dette gikk ikke, så vi går opp én grad og prøver med $x_n^p = An^2 + Bn + C$.

$$\begin{aligned} 4n + 6 &= A(n+2)^2 + B(n+2) + C - (An^2 + Bn + C) \\ &= An^2 + 4An + 4A + Bn + 2B + C - An^2 - Bn - C = 4An + 4A + 2B \end{aligned}$$

Vi har nå likningssystemet

$$\begin{cases} 4 = 4A \iff A = 1 \\ 6 = 4A + 2B \iff 6 = 4 + 2B \iff B = 1. \end{cases}$$

Følgelig har vi partiuklærløsningen $x_n^p = n^2 + n$, som er et av svaralternativene. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter svaralternativene inn i venstresiden av likningen og ser for hvilket vi oppnår likhet.

(a) $4(n+2) + 6 - (4n+6) = 4n + 4 + 6 - 4n - 6 = 4$
(b) $(n+2)^2 + (n+2) - (n^2 + n) = n^2 + 4n + 4 + n + 2 - n^2 - n = 4n + 6$

Vi ser nå at svaralternativ (b) er en løsning av den inhomogene differenslikningen. ■

Problem 11. Vi har den karakteristiske liknigen

$$r^2 - \sqrt{2}r + 1 = 0,$$

og dermed røttene ved

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{-2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Nå får vi modulusen

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1.$$

■

5. Midtveis MAT1001 Høsten 2012 — Løsning

Problem 1. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y + 3z = 6 \\ 3x + 4y - z = 10 \\ -x - 2y + 2z = -3. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 & 10 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+III \\ II-2\cdot I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{III+I \\ II\cdot -\frac{1}{5}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{I+III \\ II\leftrightarrow III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{I-8\cdot III \\ II\cdot -1+5\cdot II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1. \end{cases}$$

■

Problem 2. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + (a+1)z = 4 \\ -x + (a-1)y + 3z = 5 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a+1 & 4 \\ -1 & a-1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+III \\ I-III}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & a & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II\leftrightarrow III \\ I\leftrightarrow II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & a & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{III\cdot\frac{1}{a} \\ III-II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & \frac{4}{a}-a & \frac{6}{a}-3 \end{pmatrix}.$$

Hvis vi nå setter $a = 2$ får vi én fri variabel og følgelig uendelig mange løsninger. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har at

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ -1 & a-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (a+1)\begin{vmatrix} -1 & a-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (a-1) - 3 - 2\cdot(-1-3) + (a+1)(-1-(a-1)) = -a^2 + 4 \\ &= (2+a)(2-a) = 0 \iff a = \pm 2. \end{aligned}$$

Vi setter nå inn for a i det opprinnelige system, for å sjekke for hvilket av tilfellene vi får uendelig mange løsninger. Vi starter med $a = -2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+I \\ I-III}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nå har vi et inkonsistent system, og følgelig ingen løsning for $a = -2$. Nå har vi eliminert alle svaralternativene utenom $a = 2$. Vi kan sette inn $a = 2$ i systemet for å dobbeltsjekke at dette er riktig svar, slik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+III \\ I\leftrightarrow III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{II\cdot\frac{1}{2} \\ III-(I+II)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{I-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nå har vi én fri variabel og følgelig har vi uendelig mange løsninger når $a = 2$. ■

Problem 3. Vi har

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 & b\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + b\cdot 1 & 3\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + b\cdot 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & b-1 \\ b-1 & 4 \end{pmatrix}.$$

■

Problem 4. Vi finner egenverdiene til M ved

$$0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - 3 = -1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 - 3$$
$$= \lambda^2 - 4 = (\lambda+2)(\lambda-2) \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 2. \end{cases}$$

■

Problem 5. Vi multipliserer de gitte vektorene med B for å finne hvilke av de som er egenvektorer for matrisen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Nå ser vi at $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for B med tilhørende egenverdi -2. ■

Problem 6. Vi har

$$(1-2i)(1+2i)(3-i) = (1 + 2i - 2i + 4)(3-i) = 5(3-i) = 15 - 5i,$$

og dermed er imaginærdelen -5. ■

Problem 7. Vi har

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)\cdot\left(e^{i\pi} + i\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) - 1\right)\cdot(\cos\pi + i\sin\pi + i)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + \sqrt{3}i - 1)(-1+i) = i(i-1) = -1 - i.$$

■

Problem 8. Vi har det komplekse tallet $z = i$, og følgelig har vi modulusen ved

$$r = |z| = \sqrt{1^2} = 1.$$

Nå finner vi argumentet ved

$$\sin\theta = 1 \iff \theta = \frac{\pi}{2},$$

slik at $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Dermed får vi

$$w_0 = e^{\frac{\pi}{2}i\cdot\frac{1}{10}} = e^{\frac{\pi}{20}i}.$$

Videre merker vi oss at $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$, som gir

$$w_1 = w_0 \cdot e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{20}} \cdot e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},$$

hvilket er et av svaralternativene. ■

Problem 9. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r - 0.3 = 0 \iff r = 0.3.$$

Som gir den homogene løsningen

$$x_n^h = C(0.3)^n.$$

Videre finner vi partikulærløsningen, der vi prøver med formen $x_n^p = A$.

$$A - 0.3A = 1.4 \iff 0.7A = 1.4 \iff A = \frac{1.4}{0.7} = 2$$

Følgelig har vi partikulærløsningen $x_n^p = 2$, og dermed

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C(0.3)^n + 2 \to 2, \quad \text{når } n \to \infty.$$

■

Problem 10. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r - 1 = 0 \iff r = 1.$$

Som gir den homogene løsningen

$$x_n^h = C(1)^n = C.$$

Videre finner vi partikulærløsningen, der vi prøver med formen $x_n^p = An + B$.

$$2n = A(n+1) + B - (An + B) = A$$

Dette går ikke, så vi går nå opp én grad og prøver med $x_n^p = An^2 + Bn + C$.

$$\begin{aligned} 2n &= A(n+1)^2 + B(n+1) + C - (An^2 + Bn + C) \\ &= An^2 + 2An + A + Bn + B + C - An^2 - Bn - C = 2An + A + B \end{aligned}$$

Nå har vi likningssystemet

$$\begin{cases} 2A = 2 \iff A = 1 \\ A + B = 0 \iff B = -A \iff B = -1, \end{cases}$$

slik at partikulærløsningen er gitt ved

$$x_n^p = n^2 - n.$$

Nå følger den generelle løsningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C + n^2 - n.$$

Videre får vi av initialbetingelsen

$$x_0 = 0 \iff C = 0,$$

slik at den endelige løsningen er gitt ved

$$x_n = n^2 - n.$$

Nå har vi for $n = 20$ at

$$x_{20} = 20^2 - 20 = 380.$$

■

Problem 11. Vi multipliserer de gitte vektorene fra lineærkombinasjonen med M, for å finne deres tilhørende egenverdier:

$$M\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$$

Følgelig er $\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$ en egenvetkor for M med tilhørende egenverdi $\lambda_1 = 1$. Videre har vi at

$$M\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix},$$

slik at $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ er en egenvektor for M med tilhørende egenverdi $\lambda_2 = 1/2$. Nå følger det at

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}&=M^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=M^n\left(\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\right)=M^n\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}+M^n\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\\&=1^n\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+4\left(\frac{1}{2}\right)^n\\12-2\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix},\end{aligned}$$

slik at vi får grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12+4\left(\frac{1}{2}^n\right)}{12-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{12}{12}=1.$$

■

Alternativ løsningsmetode: Løsningsmetoden som følger tar litt tid å gjennomføre, og er egentlig mest relevant dersom en ikke får oppgitt lineærkombinasjonen.

Vi har egenverdiene ved

$$\begin{aligned}0=\det(M-\lambda I)&=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}-\lambda & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}-\lambda\end{vmatrix}=\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)\left(\frac{5}{6}-\lambda\right)-\frac{1}{18}\\&=\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}=(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})\iff\begin{cases}\lambda_1=1\\\lambda_2=\frac{1}{2}.\end{cases}\end{aligned}$$

For λ_1 har vi ved radreduksjon at

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}M-\lambda_1 I & O\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0\end{pmatrix}\overset{\substack{I\cdot -3\\ II\cdot 6}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\\&\overset{II-I}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{cases}x_1-x_2=0\iff x_1=x_2\\ x_2\text{ er fri.}\end{cases}\end{aligned}$$

Vi setter $x_2 = 1$ og får egenvektoren $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Videre for λ_2, har vi ved radreduksjon at

$$\begin{pmatrix}M-\lambda_2 I & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & 0\end{pmatrix}\overset{\substack{II-I\\ I\cdot 6}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{cases}x_1+2x_2=0\iff x_1=-2x_2\\ x_2\text{ er fri.}\end{cases}$$

Vi setter $x_2 = 1$ og får egenvektoren $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Nå ønsker vi å skrive $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene. Med andre ord skal vi finne α_1 og α_2 slik at

$$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2\iff\begin{pmatrix}16\\10\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

Dette gir det lineære likningssystemet

$$\begin{cases}\alpha_1-2\alpha_2=16\\ \alpha_1+\alpha_2=10.\end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 16 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \overset{II-I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 16 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \overset{\substack{II\cdot\frac{1}{3} \\ I+2\cdot II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{cases} \alpha_1 = 12 \\ \alpha_2 = -2. \end{cases}$$

Altså kan vi skrive $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 12\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$, som gir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = M^n \left(12\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2\right) = 12M^n\mathbf{v}_1 - 2M^n\mathbf{v}_2 = 12\lambda_1^n\mathbf{v}_1 - 2\lambda_2^n\mathbf{v}_2 \\ &= 12(1)^n\mathbf{v}_1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_2 = 12\mathbf{v}_1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n 2\mathbf{v}_2 \to 12\mathbf{v}_1, \quad \text{når } n \to \infty. \end{aligned}$$

slik at

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{12}{12} = 1, \quad \text{når } n \to \infty.$$

■

6. Midtveis MAT1001 Høsten 2013 — Løsning

Problem 1. Vi har det lineære systemet

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Ved radreduksjon får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{II-3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \overset{II\cdot(-1/5), I-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$$

■

Problem 2. Vi har det lineære systemet

$$\begin{cases} 2x_1 + ax_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{I-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & a+2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

og følgelig har ingen vi løsning for $a = -2$. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har at

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - a \iff a = -2.$$

Følgelig gir $a = -2$ et inkonsistent systemet og dermed ingen løsning.

Merk: $a = -2$ gir enten et system med uendelig mange løsninger eller et inkonsistent system. Her er spørsmålet for hvilken a vi får ingen løsning, og følgelig er den eneste aktuelle kandidaten $a = -2$. ■

Problem 3. Vi har at

$$A\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) = \frac{1}{2}AX_1 + \frac{1}{2}AX_2 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = B,$$

slik at $(1/2)X_1 + (1/2)X_2$ også er en løsning. ■

Problem 4. Vi har at

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ 3 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

■

Problem 5. Vi har at

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}.$$

■

Problem 6. Vi har at

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 - 3 \cdot 1 = a - 3.$$

■

Problem 7. Vi har det karakteristiske polynomet ved

$$\det(P - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda) = -(1-\lambda^2) = \lambda^2 - 1.$$

■

Problem 8. Vi har den karakteristiske likningen til Q ved

$$0 = \det(Q - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(3-\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-3),$$

slik at -2 er en egenverdi for Q. ■

Problem 9. Null-vektoren er ikke en egenvektor for Q, så riktig svaralternativ er (c). ■

Problem 10. Vi har at

$$A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = A\mathbf{v}_1 + A\mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2,$$

og siden $\lambda_1 \neq \lambda_2$, så får vi ikke $A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. Dermed vil ikke $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, være en egenvektor for A. ■

Problem 11. Vi har at

$$(3-i)(2+i) = 6 + 3i - 2i - (-1) = 7 + i,$$

slik at realdelen er 7. ■

Problem 12. Vi har at

$$\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 2e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} = e^0 = 1.$$

■

Problem 13. Vi har at

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = 2\left(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\right) - 1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = i\sqrt{3}.$$

■

Problem 14. Vi har det komplekse tallet $z = -1 - i$, slik at modulusen er gitt ved

$$\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Nå har vi for argumentet at

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ eller } \theta = \frac{5\pi}{4}$$
$$\sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ eller } \theta = \frac{7\pi}{4},$$

slik at argumentet er gitt ved $\theta = 5\pi/4$. Følgelig har vi polarformen

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

■

Problem 15. Det er umulig å finne verdien av x_3, uten noen form for initialbetingelse. ■

Problem 16. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r - 2 = 0 \iff r = 2,$$

slik at den homogene løsningen er gitt ved $x_n^h = 2^n C$. Videre finner vi partikulærløsningen, der vi først prøver med $x_n^p = A$.

$$-1 = A - 2A = -A \iff A = 1.$$

Nå har vi partikulærløsningen $x_n^p = 1$ og dermed den generelle løsningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = 2^n C + 1.$$

Av den gitte initialbetingelsen har vi

$$1 = x_0 \iff 1 = 2^0 C + 1 \iff C = 0,$$

slik at vi har den endelige løsningen gitt ved

$$x_n = 1.$$

Nå følger det at $x_{20} = 1$. ■

Problem 17. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r - 1 = 0 \iff r = 1,$$

slik at vår homogene løsningen er gitt ved $x_n^h = 1^n C = C$. Videre finner vi partikulærløsningen der vi først prøver med $x_n^p = An + B$:

$$2n + 1 = A(n+1) + B - (An + B) = A$$

Dette fungerte ikke, så vi går nå opp en grad og prøver med $x_n^p = An^2 + Bn + C$:

$$2n + 1 = A(n+1)^2 + B(n+1) + C - (An^2 + Bn + C) = 2An + A + B$$

Nå har vi det lineære systemet

$$\begin{cases} 2A = 2 \iff A = 1 \\ A + B = 1 \iff B = 1 - 1 = 0, \end{cases}$$

og følgelig er partikulærløsningen gitt ved $x_n^p = n^2$. Nå har vi den generelle løsningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C + n^2.$$

Av den gitte initialbetingelsen har vi

$$0 = x_0 \iff 0 = C + 0^2 \iff C = 0,$$

og dermed er den endelige løsningen gitt ved

$$x_n = n^2,$$

slik at

$$x_5 = 5^2 = 25.$$

■

Alternativ løsningsmetode: Vi har

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2n + 1 \\ x_0 = 0, \end{cases}$$

der vi setter inn verdier for n i utrykket for x_{n+1}, til vi får x_5:

$n = 0$: $x_1 = x_0 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$
$n = 1$: $x_2 = x_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$
$n = 2$: $x_3 = x_2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9$
$n = 3$: $x_4 = x_3 + 2 \cdot 3 + 1 = 16$
$n = 4$: $x_5 = x_4 + 2 \cdot 4 + 1 = 25$

■