MAT 1001: Obligatorisk oppgave 2, H-14'

Innleveringsfrist: Torsdag 6. november kl 14:30

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1001). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen. Ved rettingen gis hvert delspørsmål inntil 1-8 poeng og maks poengsum er 42. Grensen for å få godkjent settes til 21 poeng (altså minst halvparten av maks), men det kreves i tillegg at man har gjort et hederlig forsøk på å løse alle oppgavene.

Oppgave 1. *Repetisjon av komplekse tall og differensligninger*

a) (1 poeng) Bruk identiteten

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$$

til å vise formlene

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

Løsningsforslag:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + i\sin(a+b) &= e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} \\ &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)).\end{aligned}$$

Realdelene og imaginærdelene må være like på begge sider av likhetstegnet.

b) (4 poeng) Finn den generelle løsningen på differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{8}x_n = 0.$$

Løsningsforslag: Karakteristisk polynom blir $r^2 - r/2 + 1/8$, med røtter

$$r = \frac{1}{4}(1 \pm i) = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{\pm i\pi/4}.$$

Altså blir den generelle løsningen

$$x_n = A\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n \cos(n\pi/4) + B\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n \sin(n\pi/4),$$

der A og B er vilkårlige konstanter.

c) (8 poeng) Finn en spesiell løsning på differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{8}x_n = \cos(n\pi/2). \tag{1}$$

Hint: Gjett på en løsning på formen $A\cos(n\pi/2) + B\sin(n\pi/2)$ der A og B er konstanter.

Løsningsforslag: Sett $y_n = A\cos(n\pi/2) + B\sin(n\pi/2)$. Fra punkt **a**) har vi at

$$\cos((n+1)\pi/2) = -\sin(n\pi/2), \quad \cos((n+2)\pi/2) = -\cos(n\pi/2),$$
$$\sin((n+1)\pi/2) = \cos(n\pi/2), \quad \sin((n+2)\pi/2) = -\sin(n\pi/2).$$

Derfor blir

$$\begin{aligned} y_{n+2} - \frac{1}{2}y_{n+1} + \frac{1}{8}y_n &= A\cos((n+2)\pi/2) - \frac{A}{2}\cos((n+1)\pi/2) + \frac{A}{8}\cos(n\pi/2) \\ &\quad + B\sin((n+2)\pi/2) - \frac{B}{2}\sin((n+1)\pi/2) + \frac{B}{8}\sin(n\pi/2) \\ &= \left(-A - \frac{B}{2} + \frac{A}{8}\right)\cos(n\pi/2) + \left(-B + \frac{A}{2} + \frac{B}{8}\right)\sin(n\pi/2). \end{aligned}$$

Derfor må

$$\begin{aligned} -\frac{7}{8}A - \frac{1}{2}B &= 1 \\ \frac{1}{2}A - \frac{7}{8}B &= 0, \end{aligned}$$

som har løsning $A = -\frac{56}{65}$ og $B = -\frac{32}{65}$. Da blir den generelle løsningen på den inhomogene ligningen

$$x_n = A\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n \cos(n\pi/4) + B\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n \sin(n\pi/4) - \frac{56}{65}\cos(n\pi/2) - \frac{32}{65}\sin(n\pi/2).$$

d) (4 poeng) Finn løsningen på (1) som tilfredsstiller $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Løsningsforslag: Vi setter inn for $n = 0$ og $n = 1$,

$$\begin{aligned} A - \frac{56}{65} &= 0, \\ \frac{A}{4} + \frac{B}{4} - \frac{32}{65} &= 1, \end{aligned}$$

som har løsning $A = \frac{56}{65}$, $B = -\frac{332}{65}$. Altså:

$$x_n = \frac{56}{65}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n \cos(n\pi/4) - \frac{332}{65}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n \sin(n\pi/4) - \frac{56}{65}\cos(n\pi/2) - \frac{32}{65}\sin(n\pi/2).$$

Oppgave 2. *Derivasjon og integrasjon*

La f være en deriverbar funksjon som har en deriverbar invers g for x i et åpent intervall (a, b). Da har vi at $g(f(x)) = x$ for alle $x \in (a, b)$.

a) (1 poeng) Vis formelen $g'(f(x))f'(x) = 1$, for $x \in (a, b)$.

Løsningsforslag: Vi har at

$$1 = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x),$$

ved kjerneregelen.

b) (1 poeng) Vis formelen

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Løsningsforslag: Regning gir

$$1 + \tan^2(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

c) (4 poeng) Sett $f(x) = \tan(x)$. Finn $f'(x)$. Bruk formelen fra punkt **b)** for å finne $(\tan^{-1})'$, $(\sin^{-1})'$ og $(\cos^{-1})'$.

Løsningsforslag:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan(x) &= \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{(\sin(x))'\cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \\
&= 1 + \tan^2(x).
\end{aligned}$$

Siden $f(x) = \tan(x)$ blir $g(x) = \tan^{-1}(x)$, og fra punkt **a**),

$$1 = (1 + \tan^2(\tan^{-1}(x)))\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = (1 + x^2)\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x).$$

Derfor blir

$$(\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}.$$

For $f(x) = \sin(x)$ blir $f'(x) = \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ og $g(x) = f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$. Da har vi at

$$1 = \sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}(x))}\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x),$$

$$\left(\sin^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

For $f(x) = \cos(x)$ har vi at $f'(x) = -\sin(x) = -\sqrt{1-x^2}$, så da blir

$$\left(\cos^{-1}(x)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

d) (8 poeng) Finn de ubestemte integralene

$$\textbf{i)} \quad \int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx,$$

$$\textbf{ii)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx.$$

Løsningsforslag: **i**): Vi observerer at $x = \frac{1}{2}(2x+2) - 1$,

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx.$$

Det første av disse løser vi ved substitusjon $y = x^2+2x+2$, $dy = (2x+2)dx$,

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln\left(1+(x+1)^2\right) + C.$$

For det andre integralet bruker vi substitusjonen $y = (x+1)$, $dy = dx$,

$$\int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx = \int \frac{dy}{1+y^2} = \tan^{-1}(y) + C = \tan^{-1}\left(1+(x+1)^2\right) + C.$$

Legger vi sammen får vi at

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx = \ln(\sqrt{1+(x+1)^2}) - \tan^{-1}\left(1+(x+1)^2\right) + C.$$

ii): Vi observerer at $2x - x^2 = 1-(x^2-2x+1) = 1-(x-1)^2$. Derfor bruker vi substitusjonen $y = x-1$, $dy = dx$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \sin^{-1}(y) + C = \sin^{-1}(x-1) + C.$$

Oppgave 3. *Fritt fall med luftmotstand*

Akselerasjon er definert som den deriverte av hastighet med hensyn på tiden. Altså hvis vi kjenner hastigheten (til et legeme) $v(t)$, så er akselerasjonen lik $v'(t)$.

Newtons 2. lov sier at "kraft=masse·akselerasjon", eller $F = mv'(t)$, der m er massen til legemet. Når en ball med masse m faller rett nedover, er den påvirket av gravitasjonkraften, som vi skriver G og setter lik $9m\,\mathrm{kg\,m/s^2}$, samt av luftmotstanden $R = 0.25m(v(t))^2\,\mathrm{kg\,m/s^2}$. Luftmotstanden virker mot fartsretningen (som er rett nedover).

a) (2 poeng) Forklar hvorfor hastigheten til ballen tilfredstiller differensialligningen

$$v'(t) = \frac{1}{m}(G - R) = 9 - \frac{1}{4}(v(t))^2. \tag{2}$$

Løsningsforslag: Vi har at

$$v'(t) = \frac{F}{m} = \frac{1}{m}(G - R) = \frac{1}{m}\left(9m - \frac{1}{4}m(v(t))^2\right) = 9 - \frac{1}{4}(v(t))^2.$$

b) (8 poeng) Anta at ballen starter i ro, dvs. $v(0) = 0$. Løs differensialligningen (2) og finn $v(t)$.

Løsningsforslag: Vi har at

$$\frac{dv}{dt} = 9 - \frac{1}{4}v^2 = \left(3 - \frac{1}{2}v\right)\left(3 + \frac{1}{2}v\right).$$

Her får vi altså

$$\int_0^t \frac{v'(s)}{(3 - v(s)/2)(3 + v(s)/2)}\,ds = \int_0^t 1\,ds = t.$$

Integralet til venstre løser vi med substitusjon $v = v(s)$, $dv = v'(s)ds$, og delbrøkoppspalting

$$\frac{1}{(3 - v/2)(3 + v/2)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3 + v/2} + \frac{1}{3 - v/2}\right).$$

Nå blir:

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{v'(s)}{(3-v(s)/2)(3+v(s)/2)}\,ds &= \frac{1}{6}\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{1}{3+v/2} + \frac{1}{3-v/2}\,dv \\ &= \frac{1}{6}\Big(\int_0^{v(t)} \frac{1}{3+v/2}\,dv + \int_0^{v(t)} \frac{1}{3-v/2}\,dv\Big) \\ &= \frac{1}{6}\Big(2\ln(|3+v/2|) - 2\ln(|3-v/2|)\Big)\Big|_0^{v(t)} \\ &= \frac{1}{3}\ln\Big(\frac{3+v/2}{3-v/2}\Big)\Big|_0^{v(t)} \\ &= \frac{1}{3}\ln\Big(\frac{3+v(t)/2}{3-v(t)/2}\Big),\end{aligned}$$

der vi har brukt substitusjonen $y = 3 + v/2$ i det første integralet, og $y = 3 - v/2$ i det andre, og i tillegg antatt at $3 \pm v(t)/2 > 0$ (denne antagelsen rettferdigjøres seinere). Da får vi altså ligningen

$$\ln\left(\frac{3+v(t)/2}{3-v(t)/2}\right) = 3t,$$

som kan løses m.h.p. $v(t)$

$$v(t) = 6\frac{1-e^{-3t}}{1+e^{-3t}}.$$

Da ser vi at $v(t) \in [0, 6)$, og antagelsen over gjelder for vår løsning.

c) (1 poeng) Hva blir $\lim_{t\to\infty} v(t)$?

Løsningsforslag:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} 6\frac{1-e^{-3t}}{1+e^{-3t}} = 6.$$