

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT1001 — Prøveeksamen

Eksamensdag: Lørdag 6. desember 2014.

Tid for eksamen: 10:00 – 14:00.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (13 poeng)

For hvilke verdier av den reelle konstanten α har ligningssystemet

$$\begin{aligned} \alpha x + y - z &= 1 \\ x + 2\alpha y + z &= 2 \\ x + 2y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

kun én løsning?

Oppgave 2 (14 poeng)

La matrisen M være gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2a (4 poeng)

Finn egenverdiene til M , og produktet M^2 .

2b (4 poeng)

La følgen $\{\mathbf{u}_n\}_{n \geq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \geq 0}$ være gitt ved at $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and

$$\mathbf{u}_{n+1} = M\mathbf{u}_n, \quad n \geq 0.$$

Vis at

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 0 \quad \text{og} \quad y_{n+1} + y_{n-1} = 0.$$

2c (5 poeng)

Finn x_n og y_n .

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 (11 poeng)

En funksjon f tilfredstiller

$$f'(x) = x^2 \cos(x), \quad f(0) = 1.$$

Finn $f(x)$.

Oppgave 4 (13 poeng)

Bestem den løsningen på differensialligningen

$$y'' + 2y' + 10y = 0,$$

som er slik at $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$. Hva blir $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$?

Oppgave 5 (13 poeng)

En dyrebefolkning utvikler seg i henhold til den logistiske ligningen

$$y'(t) = ky(t)(N - y(t)),$$

der $y(t)$ er antall individer ved tiden t , og k og N er positive konstanter.

5a (6 poeng)

Sett

$$z(t) = \frac{1}{N}y\left(\frac{t}{Nk}\right).$$

Vis at $z' = z(1 - z)$.

5b (7 poeng)

Finn $z(t)$ dersom $y(0) = N/4$. For hvilken t er $z(t) = \frac{1}{2}$?