UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1001 — Prøveeksamen
Eksamensdag:	Lørdag 6. desember 2014.
Tid for eksamen:	10:00 – 14:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (13 poeng)

For hvilke verdier av den reelle konstanten α har ligningssystemet

$$\begin{aligned} \alpha x + y - z &= 1 \\ x + 2\alpha y + z &= 2 \\ x + 2y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

kun én løsning?

Løsningsforslag: Vi har kun én løsning hvis determinanten er forskjellig fra null. Vi regner determinanten

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2\alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} &= \alpha\left(2\alpha^2 - 2\right) - (\alpha - 1) - (2 - 2\alpha) \\ &= (\alpha - 1)\left(2\alpha(\alpha + 1) + 1\right) \\ &= (\alpha - 1)\left(\alpha^2 + (\alpha + 1)^2\right). \end{aligned}$$

Vi ser at determinanten er null kun for $\alpha = 1$, så ligningssystemet har én (og bare en) løsning for $\alpha \neq 1$.

Oppgave 2 (14 poeng)

La matrisen M være gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 2.)

2a (4 poeng)

Finn egenverdiene til M, og produktet M^2.

Løsningsforslag: Karakteristisk polynom blir λ^2+1, så egenverdiene blir $\lambda = \pm i$. Produktet

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2b (4 poeng)

La følgen $\{\mathbf{u}_n\}_{n\geq 0} = \left\{\binom{x_n}{y_n}\right\}_{n\geq 0}$ være gitt ved at $\mathbf{u}_0 = \binom{1}{0}$ and

$$\mathbf{u}_{n+1} = M\mathbf{u}_n, \qquad n \geq 0.$$

Vis at

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 0 \;\text{ og }\; y_{n+1} + y_{n-1} = 0.$$

Løsningsforslag: Vi har at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{n-1} \\ -y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2c (5 poeng)

Finn x_n og y_n.

Løsningsforslag: Vi løser for x_n og y_n, og får at

$$x_n = A\cos(n\pi/2) + B\sin(n\pi/2) \;\text{ og }\; y_n = C\cos(n\pi/2) + D\sin(n\pi/2).$$

Setter vi inn betingelsene for $n = 0$, får vi at $C = 0$ og $A = 1$. Vi har også betingelsene

$$x_{n+1} = -y_n \;\text{ og }\; y_{n+1} = x_n,$$

som innsatt x_n og y_n gir

$$\begin{gathered} -\sin(n\pi/2) + B\cos(n\pi/2) = -D\sin(n\pi/2) \;\text{ og} \\ D\cos(n\pi/2) = \cos(n\pi/2) + B\sin(n\pi/2). \end{gathered}$$

Disse gir $D = 1$ og $B = 0$. Løsningen blir da

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} \cos(n\pi/2) \\ \sin(n\pi/2) \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3 (11 poeng)

En funksjon f tilfredstiller

$$f'(x) = x^2 \cos(x), \qquad f(0) = 1.$$

Finn $f(x)$.

Løsningsforslag: Vi bruker delvisintegrasjon,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int x^2 \cos(x)\, dx \\ &= x^2 \sin(x) - 2\int x \sin(x)\, dx \\ &= x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\int \cos(x)\, dx \\ &= x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C. \end{aligned}$$

Betingelsen $f(0) = 1$ gir $C = 1$.

Oppgave 4 (13 poeng)

Bestem den løsningen på differensialligningen

$$y'' + 2y' + 10y = 0,$$

som er slik at $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$. Hva blir $\lim_{t\to\infty} y(t)$?

Løsningsforslag: Karakteristisk polynom blir $(r+1)^2 + 9$, som har røtter $r = -1 \pm i3$. Derfor blir den generelle løsningen

$$y(x) = Ae^{-x}\cos(3x) + Be^{-x}\sin(3x)$$

Vi har også at

$$y'(x) = -y(x) - 3Ae^{-x}\sin(3x) + 3Be^{-x}\cos(3x).$$

Innsetting av initialbetingelsene gir

$$A = 1 \quad \text{og} \quad -1 + 3B = 0.$$

Derfor får vi at

$$y(x) = e^{-x}\cos(3x) + \frac{1}{3}e^{-x}\sin(3x)$$

Vi får at $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Oppgave 5 (13 poeng)

En dyrebefolkning utvikler seg i henhold til den logistiske ligningen

$$y'(t) = ky(t)(N - y(t)),$$

(Fortsettes på side 4.)

der $y(t)$ er antall individer ved tiden t, og k og N er positive konstanter.

5a (6 poeng)

Sett

$$z(t) = \frac{1}{N} y\left(\frac{t}{Nk}\right).$$

Vis at $z' = z(1-z)$.

Løsningsforslag: Ved kjerneregelen blir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} z(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{N} y(\frac{t}{kN})\right) \\
&= \frac{1}{kN^2} y'\left(\frac{t}{kN}\right) \\
&= \frac{k}{kN^2} y\left(\frac{t}{kN}\right)\left(N - y\left(\frac{t}{kN}\right)\right) \\
&= \frac{1}{N} z(t)\left(N - Nz(t)\right) \\
&= z(t)(1 - z(t)).
\end{aligned}$$

5b (7 poeng)

Finn $z(t)$ dersom $y(0) = N/4$. For hvilken t er $z(t) = \frac{1}{2}$?

Løsningsforslag: Vi løser integralet med delbrøkoppspalting,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{z(1-z)} &= \int dt \\
\int \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\, dz &= t + C \\
\ln\left(\frac{z}{1-z}\right) &= t + C \\
\frac{z}{1-z} &= Ce^t \\
z &= \frac{e^t}{3+e^t} \quad \text{ved initialbetingelsen } z(0) = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ligningen $z(t) = \frac{1}{2}$ gir $t = \ln(3) \approx 1.1$.