2.4

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1\cdot 4 + 1\cdot 0 + 2\cdot 3) & (3\cdot 4 + 2\cdot 0 + 0\cdot 3) & (4\cdot 4 + 4\cdot 0 + 5\cdot 3) \\ (1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 2) & (3\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 2) & (4\cdot 1 + 4\cdot 0 + 5\cdot 2) \\ (1\cdot 5 + 1\cdot 1 + 2\cdot 4) & (3\cdot 5 + 2\cdot 1 + 0\cdot 4) & (4\cdot 5 + 4\cdot 1 + 5\cdot 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 & 31 \\ 5 & 3 & 14 \\ 14 & 17 & 44 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 4 & 25 \\ 26 & 4 & 23 \\ 33 & 5 & 26 \end{bmatrix}$$

Altså er $AB \neq BA$

2.13

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 22$

b) $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-2) - (-7 \cdot 6) = 52$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$

$= -2 \left(5 \cdot 2 - 6(-7)\right) - \left((3 \cdot 2) - (1 \cdot (-7))\right) + 4 \left(3 \cdot 6 - 1 \cdot 5\right)$

$= -2 (52) - 13 + 4 (13)$

$= -104 - 13 + 52$

$= -52 - 13 = -65$

d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & -9 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-3 \begin{vmatrix} 2 & -9 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-6 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -9 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(\overbrace{-(-9)(-2) + 6(-1)}^{-24}\right)$$

$$-3\left(\overbrace{2(+2) + 9(0) + 6(-4)}^{-20}\right)$$

$$+4\left(\overbrace{2(-2) + 6(4)}^{20}\right)$$

$$-6\left(\underbrace{2(-1) - 9(4)}_{-38}\right)$$

$$= 2(-24) - 3(-20) + 4(20) - 6(-8)$$

$$\cancel{-48} + 140 + 180 + \cancel{48} = \underline{\underline{320}}$$

Eksamensoppgave 1.17.

a) Beregn determinanten:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}^{0} - 2\overbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}^{-9}$$

$$+ a\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{-3}$$

$$= 18 - 3a = \underline{\underline{3(6-a)}}$$

b) For hvilke verdier av a og b har likningssystemet

$$L: \begin{cases} x + 2y + az = 2 & : L_1 \\ -x + y + 3z = 0 & : L_2 \\ 2x + y + 3z = b & : L_3 \end{cases}$$

en løsning, ingen løsning og uendelig mange løsninger?

Observer at matrisen i a) er koeffisient matrisen til L. Teorem 3.13 gir oss at systemet har én entydig løsning dersom $D \neq 0 \iff a \neq 6$.

Anta $a = 6$. For hvilke b har systemet ingen / uendelig mange løsninger?

$$L_1: \quad x + 2y + 6z = 2$$
$$L_2: \quad -x + y + 3z = 0$$
$$L_3: \quad 2x + y + 3z = b$$

Observer at $L_2 + L_3 \Rightarrow x + 2y + 6z = b$ L_4

$L_1 - L_4 \Rightarrow 0 = (2 - b)$.

$b \neq 2$: ingen løsninger.

$b = 2$: uendelig mange løsninger.

La oss sette $b = 2$ og finne løsningene.

$$L_3 - L_2 \Rightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$$

Siden $L_3 + L_2$ gir oss L_1 har vi kun to likninger, men tre ukjente.
Setter inn $x = \frac{2}{3}$ i L_2. Dette gir

$$y = -3z + \frac{2}{3}, \quad \text{La } z = t.$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\frac{2}{3}, -3t + \frac{2}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Eksamensoppgave 1.22

For hvilke verdier av t har likningssystemet

$$L: \begin{cases} (1-t)x + 2y = 5 \\ 3x + (2-t)y = -5 \end{cases}$$

nøyaktig en løsning?

La $A = \begin{bmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 2-t \end{bmatrix}$. Da er A koeffisientmatrisen til L. Fra Teorem 3.1 følger at systemet har én løsning dersom $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = (1-t)(2-t) - 2 \cdot 3$$

$$= 2 - 2t - t + t^2 - 6$$

$$= t^2 - 3t - 4 \left(= (t-4)(t+1) \right)$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$t_1 = 4, \quad t_2 = -1$$

Likningssystemet har nøyaktig én løsning dersom $t \notin \{4, -1\}$.